

Das Dezibel – Definition und Anwendung*

URL: <http://www.siart.de/lehre/dezibel.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

3. Juli 2010 (Version 2.20)

Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz möchte die Definition und die Anwendung der Quasi-Einheit »Dezibel« (dB) in verschiedenen Bereichen verdeutlichen. Dazu werden die Eigenschaften dieser Einheit anhand ihrer Anwendung in der Elektrotechnik aufgezeigt. Dies führt unmittelbar auf die Begründung der Pegelmaße dB μ V, dBu und dBm. Anschließend folgt eine Erklärung der Bedeutung des dBi in der Antennentechnik sowie der akustischen Lautstärkepegelmaße phon und dB(A) und der Angabe der Radarreflektivität in dBz. An mehreren Stellen wird zudem der Versuch unternommen, häufig wiedergegebene Fehlinterpretationen und Missverständnisse aufzuklären.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	2
2. Definition	2
3. Anwendung	5
3.1. Pegelrechnung	5
3.2. Rauschpegel	8
3.3. Das Dezibel in der Antennentechnik	9
3.4. Das Dezibel in der Akustik	10
3.5. Das Dezibel in der Radarmeteorologie	15

*Die Abschnitte 1 bis 3.2 dieses Aufsatzes sind ein Auszug aus: Detlefsen, J.; Siart, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 3. Auflage. München : Oldenbourg, 2009.

1. Einführung

In der Hochfrequenz- und Nachrichtentechnik hat sich zur Behandlung von Verstärkungen, Dämpfungen und Signalpegeln die Quasi-Einheit *Dezibel* (dB) als nützliches Hilfsmittel erwiesen. Die Grundidee ist hierbei, Verstärkungen (oder allgemein Verhältnisse von Leistungen oder Spannungen¹) nicht direkt sondern logarithmiert anzugeben. Das Dezibel ist keine echte Einheit sondern vielmehr nur der Hinweis, dass der angegebene Zahlenwert der dekadische Logarithmus eines Verhältnisses ist. Das Dezibel kann aber dann zur echten Einheit werden, wenn ein Bezugswert fest vereinbart wird und eine physikalische Größe in Vielfachen dieses Bezugswertes angegeben wird. Wir kommen unten darauf zurück.

Die Einführung der Logarithmierung hat mehrere Vorteile. In Nachrichtensystemen bewegen sich die Signalpegel in der Regel über viele Größenordnungen. Durch die Logarithmierung werden diese weiten Schwankungsbereiche auf Zahlenwerte abgebildet, die wesentlich einfacher zu handhaben sind. Außerdem können allgemeine Nachrichtensysteme stets als Kettenanordnung mehrerer Teilsysteme verstanden werden. Dazu gehören schaltungstechnische Komponenten, also Verarbeitungs- und Verstärkerstufen, ebenso wie Leitungen und Funkstrecken. Beim Durchlaufen der einzelnen Stufen erfährt das Nachrichtensignal jeweils eine Änderung seiner Leistung. Bei der Berechnung der gesamten Leistungsänderung sind die Verstärkungen der an der Kette beteiligten Einzelstufen zu multiplizieren. Wegen der Eigenschaft

$$\log_n(x \cdot y) = \log_n x + \log_n y \quad (1)$$

des Logarithmus kann diese Multiplikation jedoch durch eine einfache Addition ersetzt werden, falls die Verstärkungen nicht direkt, sondern deren Logarithmen verwendet werden. Ebenso kann eine Division wegen

$$\log_n\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_n y \quad (2)$$

durch eine Subtraktion ersetzt werden, sodass

$$\log_n\left(\frac{x}{y}\right) = \log_n x - \log_n y. \quad (3)$$

2. Definition

Zur Erläuterung der Vorgehensweise ist in Abb. 1 ein einzelner Vierpol als Mitglied einer Übertragungskette zusammen mit den Spannungen, Leistungen und Widerständen an seinen beiden Toren dargestellt. Wir setzen voraus, dass an beiden Toren ausschließlich Wirkleistungsfluss vorliegt. Mit der Eingangsleistung P_1 und der Ausgangsleistung

¹Spannungsverhältnisse sind jedoch nur eingeschränkt als Maß für Verstärkungen geeignet (siehe dazu Anmerkung 1 auf Seite 4).

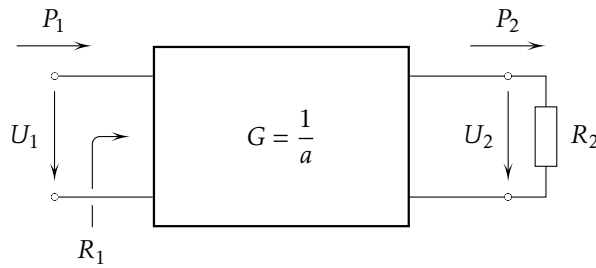


Abb. 1: Zur Definition von Gewinn G und Dämpfung a

P_2 lassen sich dann die Größen

$$G = \frac{P_2}{P_1} \quad \text{Gewinn} \quad (4a)$$

$$a = \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{G} \quad \text{Dämpfung} \quad (4b)$$

definieren. Wir wollen an dieser Stelle auch deutlich die Begriffe *Gewinn* und *Dämpfung* unterscheiden. Mit Gewinn oder Verstärkung verbindet man allgemein die Vorstellung, dass $P_2 > P_1$ sei. Formal darf aber auch $G < 1$ sein. In diesem Fall spricht man jedoch häufiger von einer Dämpfung. Deshalb führen wir zusätzlich die Dämpfung $a = 1/G$ ein.

Um nun einerseits große Pegelbereiche und andererseits die Kettenschaltung einfacher behandeln zu können, arbeitet man seltener mit den direkten Verhältnissen (4) sondern mit deren Zehnerlogarithmen und man definiert

$$\frac{G}{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (5a)$$

$$\frac{a}{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = -\frac{G}{\text{dB}}. \quad (5b)$$

Um zu verdeutlichen, dass es sich um die logarithmierten Verhältnisse handelt, führt man den Zusatz *Dezibel* (dB) ein. Aus der Definition (5) wird jedoch sofort klar, dass es sich nicht um eine echte Dimension handelt.

Wir wollen nun voraussetzen, dass in einer gegebenen Kettenschaltung alle Tore angepasst sind, weil nur dann eine Multiplikation der Einzelverstärkungen und damit auch die im Folgenden besprochene Addition der korrespondierenden logarithmierten Werte zulässig ist. Liegt zusätzlich am Eingang und am Ausgang des betrachteten Systems das gleiche Impedanzniveau $R_2 = R_1$ vor, kann der Leistungsgewinn auch durch das Spannungsverhältnis berechnet werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{G}{\text{dB}} &= 10 \cdot \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot \log_{10} \frac{U_2^2/R_2}{U_1^2/R_1} \\ &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)_{R_1=R_2}^2 = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)_{R_1=R_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Man beachte, dass bei Berechnung des Gewinns in dB aus dem Spannungsverhältnis U_2/U_1 vor dem Logarithmus der Faktor 20 entsteht, im Gegensatz zum Faktor 10 bei

Berechnung aus dem Leistungsverhältnis P_2/P_1 . Dieser Unterschied ergibt sich aus der Eigenschaft

$$\log_n(x^a) = a \cdot \log_n x \quad (7)$$

des Logarithmus und der Tatsache, dass die Leistung proportional zum Quadrat der Spannungsamplitude ist. Die Berechnung von G aus U_2/U_1 oder aus P_2/P_1 führt also *nicht* zu unterschiedlichen dB-Werten. Es gibt daher auch keinen Grund zur Unterscheidung zwischen »Spannungs-dB« und »Leistungs-dB«, wie häufig zu hören ist. Die Angabe von G oder a in Dezibel ist eindeutig. Sie bedarf wegen (6) keiner Zusatzangabe darüber, ob sie aus einem Spannungs- oder aus einem Leistungsverhältnis berechnet wurde. Ein Unterschied ergibt sich lediglich bei der Berechnung von Spannungsverstärkung $G_U = U_2/U_1$ und Leistungsverstärkung $G_P = P_2/P_1$ aus der Verstärkung in Dezibel. Wegen $G_P = G_U^2$ ergeben sich hier verschiedene Werte. Die Umkehrung von (6) lautet

$$G_U = \frac{U_2}{U_1} = 10^{G/20\text{dB}} \quad \text{Spannungsverstärkung} \quad (8a)$$

$$G_P = \frac{P_2}{P_1} = 10^{G/10\text{dB}} \quad \text{Leistungsverstärkung.} \quad (8b)$$

Für den praktischen Umgang mit logarithmischen Verstärkungen ist es nützlich, einige Werte auswendig zu kennen (Tabelle 1). Aus diesen lassen sich dann andere Werte durch Multiplikation der linearen Werte und durch korrespondierende Addition der logarithmierten Werte ableiten.

Anmerkung 1 Der häufig anzutreffende Irrtum, es sei zwischen »Spannungs-dB« und »Leistungs-dB« zu unterscheiden, rührt vermutlich unter anderem von der Unterscheidung zwischen Spannungsverstärkung und Leistungsverstärkung her. Wenn das Impedanzniveau unverändert ist, hängen Spannungsverstärkung und Leistungsverstärkung fest zusammen und führen auf den gleichen Wert in dB. In allen anderen Fällen ist zu bedenken, dass nur die *Signalleistung* als physikalische Erhaltungsgröße eine sinnvolle Grundlage für die Begriffe »Verstärkung« und »Dämpfung« darstellt, weil die Signalspannung unabhängig von der Signalleistung durch bloße Impedanztransformation angehoben oder abgesenkt werden kann. Betrachtet man nur die Signalspannung und lässt man das Impedanzniveau außer Acht, dann gelangt man beispielsweise zu der (offensichtlich trügerischen) Aussage, dass ein 1:10-Übertrager eine Spannungsverstärkung von 20 dB aufweist, obwohl er als rein reaktives Netzwerkelement die durchgehende Wirkleistung im idealen Fall nicht verändert und im realen Fall aufgrund seiner Verluste sogar verkleinert. Wenn also Spannungsverstärkung und Leistungsverstärkung zu unterschiedlichen dB-Werten führen, dann nur deshalb, weil sich außer der Signalleistung auch das Impedanzniveau verändert hat und in (6) der Faktor $R_1/R_2 \neq 1$ ist. In diesem Sinne ist der Begriff der Spannungsverstärkung eigentlich unnötiges Beiwerk, das nur dann sinnvoll gebraucht werden kann, wenn ein konstantes Impedanzniveau vorliegt.

Tabelle 1: Einige ausgewählte Verstärkungswerte in Dezibel. Aus ihnen können weitere Werte durch Multiplikation abgeleitet werden.

G_P	1/1000	1/100	1/10	1/5	1/3	1/2	1	2	3	5	10	100	1000
a_P	1000	100	10	5	3	2	1	1/2	1/3	1/5	1/10	1/100	1/1000
G (dB)	-30	-20	-10	-7	-4,77	-3	0	3	4,77	7	10	20	30
a (dB)	30	20	10	7	4,77	3	0	-3	-4,77	-7	-10	-20	-30

Beispiel 1 Gesucht wird der zur Leistungsverstärkung $G_P = 30$ gehörende Wert in dB. Es ist

$$G_P = 30 = 3 \cdot 10,$$

also

$$\frac{G_P}{\text{dB}} = 4,77 + 10 = 14,77.$$

Beispiel 2 Welche Spannungsverstärkung G_U hat ein Verstärker mit 20 dB Verstärkung?

Zur Beantwortung dieser Frage ist – entgegen einer weit verbreiteten Meinung – *keine* Zusatzangabe darüber notwendig, ob die Angabe »20 dB« von der Spannungsverstärkung G_U oder von der Leistungsverstärkung G_P abgeleitet ist. Vielmehr ist zu beachten, dass $G_U = \sqrt{G_P}$ (bei gleichem Impedanzniveau) ist. Mit etwas Übung identifiziert man sofort die Leistungsverstärkung zu $G_P = 100$ (wegen $10 \log_{10}(100) = 20$) und damit die Spannungsverstärkung zu $G_U = 10$. Es sei noch einmal betont, dass beide Werte $G_U = 10$ und $G_P = 100$ über das Impedanzniveau fest zusammenhängen. Beide Werte ergeben bei Auswertung von (6) den gleichen Wert $G = 20$ dB.

3. Anwendung

3.1. Pegelrechnung

Das Dezibel gibt das Verhältnis zweier Größen an und ist daher ohne Dimension. Wenn jedoch eine feste Bezugsgröße vereinbart wird, können auf diese Weise auch dimensionsbehaftete Größen logarithmisch angegeben werden. Häufige Bezugswerte sind $1 \mu\text{V}$ für Spannungspegel und 1 mW für Leistungspegel. Die Bezugsgröße deutet man durch einen Zusatz an und verwendet die Einheit $\text{dB}\mu\text{V}$ für Spannungen, bezogen auf $1 \mu\text{V}$ und die Einheit dBm für Leistungen, bezogen auf 1 mW . Im Gegensatz zum Dezibel handelt es sich bei $\text{dB}\mu\text{V}$ und dBm um *echte* Einheiten, die einen Spannungswert beziehungsweise eine Leistung bezeichnen². Wir definieren also den Spannungspegel L_U und den Leistungspegel L_P wie folgt:

$$\frac{L_U}{\text{dB}\mu\text{V}} = 20 \cdot \log_{10} \frac{U}{1 \mu\text{V}} \quad \text{Spannungspegel} \quad (9a)$$

$$\frac{L_P}{\text{dBm}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P}{1 \text{ mW}} \quad \text{Leistungspegel.} \quad (9b)$$

Die unterschiedlichen Vorfaktoren 10 und 20 bewirken wieder, dass sich bei gegebener Verstärkung sowohl der Spannungspegel wie auch der Leistungspegel um den selben Wert ändern. Dadurch wird der Zusammenhang $P \sim U^2$ (bei festem Impedanzniveau) berücksichtigt. Bei der Umrechnung der logarithmischen Pegel (9) sind die verschiedenen Vorfaktoren richtig einzusetzen und es ergibt sich

$$U = 1 \mu\text{V} \cdot 10^{L_U/20 \text{ dB}\mu\text{V}} \quad (10a)$$

$$P = 1 \text{ mW} \cdot 10^{L_P/10 \text{ dBm}}. \quad (10b)$$

²Siehe dazu auch Anmerkung 3 auf Seite 9

Ein Vorteil der Einführung von logarithmischen Pegeln ist die einfache Berechnung von absoluten Pegeln in Übertragungsketten. Dem Zahlenwert des Eingangspiegels ist lediglich der Zahlenwert der Verstärkung (in dB) hinzuaddieren. Dabei ist es wegen der Definition (9) gleichgültig, ob mit Spannungs- oder Leistungspegeln gerechnet wird. Wir wollen dies am Beispiel des Spannungspegels zeigen.

Die Ausgangsspannung U_2 eines Vierpols ist mit der Spannungsverstärkung nach (8a) gegeben durch

$$U_2 = U_1 \cdot 10^{G/20 \text{ dB}} = 1 \mu\text{V} \cdot 10^{L_{U1}/20 \text{ dB}\mu\text{V}} \cdot 10^{G/20 \text{ dB}}, \quad (11)$$

wobei noch der Ausdruck (10a) zur Umrechnung des Eingangsspannungspegels L_{U1} in die Eingangsspannung U_1 verwendet wurde. Die Anwendung von (9a) zur Berechnung des Ausgangsspannungspegels L_{U2} ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{L_{U2}}{\text{dB}\mu\text{V}} &= 20 \cdot \log_{10} \frac{U_2}{1 \mu\text{V}} = 20 \cdot \log_{10} \left(10^{L_{U1}/20 \text{ dB}\mu\text{V}} \cdot 10^{G/20 \text{ dB}} \right) \\ &= 20 \cdot \log_{10} \left(10^{L_{U1}/20 \text{ dB}\mu\text{V}} \right) + 20 \cdot \log_{10} \left(10^{G/20 \text{ dB}} \right) = \frac{L_{U1}}{\text{dB}\mu\text{V}} + \frac{G}{\text{dB}}, \quad (12) \end{aligned}$$

womit die oben gemachte Behauptung bewiesen ist. Die Rechnung mit dem Leistungspegel ist äquivalent und wird hier nicht gesondert durchgeführt. Es ergeben sich die Zahlenwertgleichungen

$$\boxed{\frac{L_{U2}}{\text{dB}\mu\text{V}} = \frac{L_{U1}}{\text{dB}\mu\text{V}} + \frac{G}{\text{dB}}} \quad (13a)$$

$$\boxed{\frac{L_{P2}}{\text{dBm}} = \frac{L_{P1}}{\text{dBm}} + \frac{G}{\text{dB}}} \quad (13b)$$

zur Berechnung der Pegel am Ausgang einer Übertragungskette. Hier wird noch einmal deutlich, dass durch die Einführung des Dezibel die Pegelberechnung in Übertragungsketten auf einfache Additionen oder Subtraktionen zurückgeführt wird. Solange das Impedanzniveau gleich bleibt, erfahren die Zahlenwerte für L_U und L_P entlang einer Vierpolkette stets die gleichen Änderungen. Falls die Impedanz bekannt ist, kann zwischen Spannung und Leistung direkt umgerechnet werden. In der Praxis ist es daher üblich, in diesem Fall die Unterscheidung zwischen Spannungs- und Leistungspegel fallen zu lassen und statt dessen nur vom Signalpegel schlechthin zu sprechen. Eine häufige Bezugsimpedanz im Bereich häuslicher Rundfunkempfangsanlagen ist $Z_L = 75 \Omega$. Unter dieser Vorgabe kann mit $P = U_{\text{eff}}^2/Z_L$ die Entsprechung

$$1 \mu\text{V} \Big|_{75 \Omega} = 0 \text{ dB}\mu\text{V} \Big|_{75 \Omega} \hat{=} -108,8 \text{ dBm}$$

gefunden werden. Bei anderen Impedanzen ergeben sich entsprechend andere Umrechnungen. Weil sich – wie oben gezeigt – die Zahlenwerte von Spannungs- und Leistungspegel stets um den gleichen Wert ändern, genügt es, die (feste) Differenz zwischen beiden Werten nur einmal zu berechnen. Zweckmäßigerweise wählt man dabei

einen der beiden Werte zu Null. In Abb. 3 auf Seite 21 ist der Zusammenhang zwischen Spannungs- und Leistungspegel für ausgewählte Impedanzniveaus in Form eines Nomogramms gezeigt. Dort wird auch grafisch deutlich, dass sowohl Spannungs- als auch Leistungspegelskalen der gleichen Längeneinheit folgen, dass eine Dekade auf der Leistungsskala einer Änderung um 10 dB und eine Dekade auf der Spannungsskala einer Änderung um 20 dB entsprechen und dass sich die Spannungspegelskalen für verschiedene Impedanzen nur um eine relative Verschiebung unterscheiden.

Beispiel 3 Wir haben oben bereits gefunden, dass bei 75Ω dem Spannungspegel $0\text{ dB}\mu\text{V}$ (Effektivwert) ein Leistungspegel von $-108,8\text{ dBm}$ entspricht. Daraus folgt nun der feste Zusammenhang

$$\frac{L_P}{\text{dBm}} = \frac{L_U}{\text{dB}\mu\text{V}} - 108,8,$$

falls das Impedanzniveau 75Ω beträgt. Beträgt der Spannungspegel auf einer 75Ω -Leitung also beispielsweise $100\text{ dB}\mu\text{V}$, so hat das Signal eine Leistung von $(100 - 108,8)\text{ dBm} = -8,8\text{ dBm}$. Mit dieser Eigenschaft erweist sich das Dezibel auch bei der Berechnung von Rauschpegeln als besonders nützlich (siehe Abschnitt 3.2).

Beispiel 4 Welchen Spannungspegel L_U und welchen Leistungspegel L_P liefert ein 75Ω -Antennenverstärker, der eine Verstärkung von 17 dB hat, wenn er am Eingang einen Spannungspegel von $40\text{ dB}\mu\text{V}$ erhält?

Laut (13) werden durch den Verstärker sowohl Spannungs- als auch Leistungspegel um 17 dB erhöht. Zur Übung sei hier kurz der entsprechende lineare Verstärkungswert berechnet. Wenn man die Entsprechungen

$$\begin{aligned} G = 20\text{ dB} &\cong G_P = 100 \\ G = -3\text{ dB} &\cong G_P = 0,5 \end{aligned}$$

kennt, so kann man wegen $17\text{ dB} = 20\text{ dB} - 3\text{ dB}$ sehr leicht auch die Entsprechung

$$G = 17\text{ dB} \cong G_P = 100 \cdot 0,5$$

finden. Der Verstärker hat also eine Leistungsverstärkung von $G_P = 50$ oder eben eine Spannungsverstärkung von $G_U = \sqrt{50}$. Mit Hilfe der logarithmischen Pegelheiten ergibt sich für den Ausgangsspannungspegel

$$L_U = (40 + 17)\text{ dB}\mu\text{V} = 57\text{ dB}\mu\text{V},$$

was bei 75Ω einem Leistungspegel von

$$L_P = (57 - 108,8)\text{ dBm} = -51,8\text{ dBm}$$

entspricht. Der zur Spannung $40\text{ dB}\mu\text{V}$ gehörende Eingangsleistungspegel ist um 17 dB kleiner als der Ausgangsleistungspegel und beträgt daher $-68,8\text{ dBm}$.

Anmerkung 2 Im Zusammenhang mit der logarithmischen Angabe von Spannungs- und Leistungspegeln ist häufig die falsche Behauptung anzutreffen, sie seien auf eine bestimmte Impedanz bezogen. Richtig ist dagegen: Ein Spannungspegel L_U (in $\text{dB}\mu\text{V}$) entspricht genau einer Spannung U (in V) und ein Leistungspegel L_P (in dBm) entspricht genau einer Leistung P (in W). Die Impedanz R ist dabei völlig unerheblich und legt als Proportionalitätsfaktor in $U_{\text{eff}}^2 = P \cdot R$ nur die Zahlenwertdifferenz zwischen Spannungspegel und Leistungspegel fest. Ursache für diesen weit verbreiteten Irrtum ist möglicherweise die Tatsache, dass die Nennimpedanz in der Hochfrequenztechnik (aus anderen Gründen) als *Bezugsimpedanz* bezeichnet wird. Die Abhängigkeit von Dämpfung und Verstärkung von dieser Bezugsimpedanz hat ihren Grund jedoch *nicht* darin, dass diese Impedanz in irgendeiner Weise in die Definition von Spannungspegel

und Leistungspegel eingeht. Vielmehr ist es so, dass die Spannungs- und Leistungsübertragungsfunktion eines Zweites selbstverständlich von den Impedanzen abhängen, zwischen denen es betrieben wird. Daher hat ein Verstärker oder ein Dämpfungsglied nur dann seine Nennverstärkung oder -dämpfung, wenn Generator- und Lastimpedanz den dieser Spezifikation zugrundeliegenden Wert haben.

Die in der Tontechnik verbreitete Einheit dBu bezeichnet ebenfalls einen Spannungspegel, jedoch mit dem Bezugswert $U_{\text{eff}} = 775 \text{ mV}$. Dies ist der Effektivwert der Spannung, welcher an einem Widerstand von 600Ω die Wirkleistung 1 mW umsetzt. Eine Konsequenz dieser Festlegung ist, dass der Spannungspegel in dBu und der Leistungspegel in dBm den gleichen Zahlenwert besitzen, wenn das Impedanzniveau 600Ω beträgt. Die Werte 600Ω und 1 mW begründen also lediglich die Wahl des Bezugswertes 775 mV . Ansonsten ist die Angabe der Spannung in der Einheit dBu ebenso unabhängig vom Impedanzniveau 600Ω und von der Leistung 1 mW wie die Angabe in der Einheit Volt und sie kann ebenso wie die Einheit dBuV zur Angabe von Spannungspegeln verwendet werden.

3.2. Rauschpegel

Die Thermodynamik lehrt, dass durch die thermische Bewegung der Ladungsträger in Leitern oder Halbleitern an den Klemmen des Bauelements eine Rauschleistung von

$$N = k \cdot T \cdot \Delta f \quad (14)$$

verfügbar ist. Dabei ist $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur in Kelvin und Δf die Rauschbandbreite. Weil die Raumtemperatur $T = 300 \text{ K}$ sehr häufig als Rauschtemperatur auftritt, ist es sinnvoll, die Rauschleistung bei dieser Temperatur und $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ zu kennen. Dabei ergibt sich

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K} \cdot 1 \text{ Hz}}{1 \text{ mW}} \right) \text{ dBm} = -173,83 \text{ dBm} \approx -174 \text{ dBm}.$$

Es lohnt sich, diesen Zahlenwert zu kennen, weil damit sehr schnell die Rauschleistung bei Raumtemperatur auch für andere Bandbreiten bestimmt werden kann. Nachdem die Bandbreite Δf in (14) als Faktor auftritt, kann die Erhöhung der Bandbreite wie eine Verstärkung behandelt werden, sodass zum Zahlenwert -174 lediglich der Wert von

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\Delta f}{\text{Hz}} \right)$$

hinzuzuaddieren ist.

Beispiel 5 Die verfügbare thermische Rauschleistung eines ohmschen Widerstandes auf Raumtemperatur ($T = 300 \text{ K}$) bei einer Rauschbandbreite von 10 MHz ist

$$L_N = (-174 + 70) \text{ dBm} = -104 \text{ dBm},$$

weil

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{10 \text{ MHz}}{1 \text{ Hz}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{10^7 \text{ Hz}}{1 \text{ Hz}} \right) = 70.$$

Anmerkung 3 Beispiel 5 auf der vorherigen Seite zeigt, dass die Bezeichnung »echte Einheit« bei Pegelgrößen ein wenig relativiert werden muss, da die logarithmischen Pegelgrößen zwar (einer Einheit gleich) den Absolutwert einer physikalischen Größe angeben, wegen der Logarithmierung aber nicht wie mit linearen Einheiten gerechnet werden kann. Beispielsweise ist die Angabe einer spektralen Leistungsdichte in der Einheit dBm/Hz zwar allgemein üblich, jedoch bei strenger Betrachtung mathematisch unsinnig, denn der Zahlenwert dieser Größe ist nicht proportional zur Bandbreite in Hz, so wie es die Schreibweise »dBm pro Hertz« der Einheit vorgibt. So folgt aus der Angabe »-40 dBm/Hz« eben nicht, dass sich in einer Bandbreite von 5 Hz die Leistung -200 dBm befindet ($-40 \text{ dBm/Hz} \neq -200 \text{ dBm/5 Hz}$). Vielmehr muss dem Zahlenwert -40 der dem Faktor 5 entsprechende Zahlenwert von $10 \log_{10}(5) = 7$ hinzuaddiert werden, sodass bei einer spektralen Leistungsdichte von -40 dBm/Hz mit einer Bandbreite von 5 Hz eine Leistung von $(-40 + 7) \text{ dBm} = -33 \text{ dBm}$ erfasst wird.

3.3. Das Dezibel in der Antennentechnik

Weil die in die Klemmen einer Antenne eingespeiste Sendeleistung P_S grundsätzlich nicht genau gleichmäßig in alle Richtungen (isotrop) abgestrahlt werden kann, erzeugt eine reale Antenne im Allgemeinen in mindestens einer Abstrahlrichtung eine höhere Strahlungsleistungsdichte als ein (fiktiver) isotroper Strahler. Würde die Sendeleistung P_S isotrop abgestrahlt und im Abstand r gleichmäßig auf eine Kugel mit der Oberfläche $4\pi r^2$ verteilt, dann ergäbe sich im Fernfeld bei einem Abstand r von der Antenne die richtungsunabhängige Strahlungsleistungsdichte

$$S_{*,i}(r) = \frac{P_S}{4\pi r^2}. \quad (15)$$

Der *Gewinn* einer Antenne in Richtung (ϑ, φ) ist der Faktor, um den sich die tatsächlich erzeugte Strahlungsleistungsdichte $S_*(r, \vartheta, \varphi)$ von der Strahlungsleistungsdichte $S_{*,i}(r)$ unterscheidet, die im gleichen Abstand bei isotroper Abstrahlung der gleichen Sendeleistung entstehen würde, also

$$G(\vartheta, \varphi) = \frac{S_*(r, \vartheta, \varphi)}{S_{*,i}(r)} \Bigg|_{r=\text{const}}. \quad (16)$$

Der Gewinn wird in der Regel mit diesem Bezug auf den isotropen Strahler und logarithmisch in der Quasi-Einheit dBi angegeben, wodurch auf die Logarithmierung und die isotrope Abstrahlung als Vergleichsgröße hingewiesen wird (engl.: decibels above isotropic). Es ist also

$$\boxed{\frac{G(\vartheta, \varphi)}{\text{dBi}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{S_*(r, \vartheta, \varphi)}{S_{*,i}(r)} \Bigg|_{r=\text{const}}}. \quad (17)$$

Mit Hilfe des Reziprozitätstheorems der Elektrodynamik kann gezeigt werden, dass die Wirkfläche einer Antenne im Empfangsbetrieb ebenfalls um den Faktor G größer ist als die Wirkfläche $\lambda_0^2/(4\pi)$ eines isotropen Strahlers [1, 2]. Die um den Faktor G erhöhte Sendeleistung P_S bezeichnet man als *effektiv isotrop abgestrahlte Leistung* (engl.: effective/equivalent isotropic radiated power, EIRP), denn diese Leistung müsste isotrop

abgestrahlt werden, um im Fernfeld die gleiche Strahlungsleistungsdichte zu erhalten, wie bei Abstrahlung der Leistung P_S mit dem Antennengewinn G . Daher berechnet sich der *Leistungspegel der EIRP* mit der Zahlenwertgleichung

$$\frac{\text{EIRP}}{\text{dBm}} = \frac{P_S}{\text{dBm}} + \frac{G}{\text{dBi}}. \quad (18)$$

Beispiel 6 Welchen Gewinn hat eine Antenne, die bei einer eingespeisten Sendeleistung von $P_S = 1,2 \text{ kW}$ in ihrer Hauptstrahlrichtung im Abstand von $r = 8 \text{ km}$ eine elektrische Feldstärke von $|E_0| = 67 \text{ mV/m}$ (Spitzenwert) erzeugt?

Ein isotroper Strahler würde im gleichen Abstand die Strahlungsleistungsdichte

$$S_{*,i}(r) = \frac{P_S}{4\pi r^2} = \frac{1200 \text{ W}}{4\pi \cdot (8000 \text{ m})^2} = 1,5 \mu\text{W/m}^2$$

erzeugen. Die besagte Antenne erzeugt jedoch aufgrund von Bündelung der Leistung in Hauptstrahlrichtung ($\vartheta_{\max}, \varphi_{\max}$) eine Strahlungsleistungsdichte von

$$S_*(r, \vartheta_{\max}, \varphi_{\max}) = \frac{|E_0|^2}{2 \cdot Z_{F0}} = \frac{(0,067 \text{ V/m})^2}{2 \cdot 377 \Omega} = 6 \mu\text{W/m}^2.$$

Wegen

$$\frac{G(\vartheta_{\max}, \varphi_{\max})}{\text{dBi}} = 10 \cdot \log_{10} \left. \frac{S_*(r, \vartheta_{\max}, \varphi_{\max})}{S_{*,i}(r)} \right|_{r=\text{const}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{6 \mu\text{W/m}^2}{1,5 \mu\text{W/m}^2} = 10 \cdot \log_{10}(4) = 6$$

hat sie also einen Gewinn von 6 dBi und die effektiv isotrop abgestrahlte Leistung ist $\text{EIRP} = 4P_S = 4,8 \text{ kW}$. Dies entspricht einem Leistungspegel von $\text{EIRP} = 66,8 \text{ dBm}$, der um 6 dB (Faktor 4) höher ist als der Sendeleistungspegel von $L_{P_S} = 10 \log_{10}(1,2 \text{ kW}/1 \text{ mW}) \text{ dBm} = 60,8 \text{ dBm}$.

3.4. Das Dezibel in der Akustik

Im Bereich der Akustik müssen ebenso wie in der Elektrotechnik Pegelbereiche über mehrere Größenordnungen hinweg behandelt werden. Daher wird in der Akustik das Dezibel ebenso vorteilhaft zur Bezifferung der Schallintensität verwendet, wie in der Signalverarbeitung. Zur Erläuterung der wichtigsten Kenngrößen einer Schallwelle betrachten wir ein einfaches homogenes Schallwellenfeld mit der zeitlichen Periode T (Periodendauer) und der örtlichen Periode λ (Wellenlänge), welches sich geradlinig entlang der Koordinate x ausbreitet. Die Auslenkung ξ der Gasmoleküle (der *Schallauschlag*) gehorcht dann der Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\xi(t, x) = \hat{\xi} \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (19)$$

mit der maximalen Auslenkung $\hat{\xi}$, der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ und der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$. Von der Auslenkung (19) lässt sich die Orts- und Zeitabhängigkeit

$$p(t, x) = p_0 + \hat{p} \cdot \cos(\omega t - kx) \quad (20)$$

des *Schalldrucks* p ableiten [5]. Dabei sind p_0 der Gleichdruck und

$$\hat{p} = \rho \cdot c \cdot \omega \cdot \hat{\xi} \quad (21)$$

die *Schalldruckamplitude*.

Anmerkung 4 Im Bereich der Tontechnik ist es üblich, die Amplitude \hat{p} des Wechseldruckes als den »Schalldruck« zu bezeichnen [4]. Weil aber der Druck in einer Schallwelle nicht konstant ist, sondern entsprechend (20) vom Ort und von der Zeit abhängt, soll im Rahmen dieses Aufsatzes klar unterschieden werden zwischen dem Schalldruck $p(x,t)$ als dem momentanen Gesamtdruck in einem Schallwellenfeld und der Amplitude \hat{p} des darin enthaltenen Wechseldruckes $\hat{p} \cdot \cos(\omega t - kx)$. In diesem Sinne werden in Tabelle 2 auf Seite 13 Aussagen über den Schalldruck dann als falsch bezeichnet, wenn eigentlich die Schalldruckamplitude gemeint ist. In einem Umfeld, in dem klar und unmissverständlich vereinbart ist, dass mit »Schalldruck« nicht der Gesamtdruck p sondern die Amplitude \hat{p} des Wechseldruckes gemeint ist, sind diese Aussagen natürlich richtig.

Das Ausbreitungsmedium ist gekennzeichnet durch die Schallgeschwindigkeit c und durch seine Dichte ρ . Durch einfache Differenziation der Auslenkung (19) nach der Zeit t erhält man die Geschwindigkeitsamplitude der Gasmoleküle

$$\hat{v} = \omega \cdot \hat{\xi}, \quad (22)$$

die so genannte *Schallschnelle*. Die Schallschnelle ist die maximale Geschwindigkeit, welche die Gasmoleküle während ihrer lokal begrenzten Schwingbewegung erreichen. Sie ist nicht zu verwechseln mit der Schallgeschwindigkeit, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwelle in ihrer Ausbreitungsrichtung darstellt. Den Quotienten aus Schalldruckamplitude und maximaler Schallschnelle bezeichnet man als die *Schallimpedanz*

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho \cdot c. \quad (23)$$

Die Energiestromdichte einer Schallwelle (Energie pro Zeit und Fläche in $\text{J}/(\text{m}^2\text{s}) = \text{W}/\text{m}^2$) bezeichnet man in der Akustik als *Schallintensität*. Sie ergibt sich aus den Kenngrößen des Wellenfeldes zu

$$I = \frac{1}{2} \hat{p} \cdot \hat{v} = \frac{\hat{p}^2}{2Z}. \quad (24)$$

In ähnlicher Weise wie bei den in (9) eingeführten Spannungs- und Leistungspegeln führt man für die logarithmische Angabe der Schallintensität einen Bezugswert I_0 ein. Der *Schallintensitätspegel* L_I (in dB) ist festgelegt durch

$$\boxed{\frac{L_I}{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad \text{mit} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2.} \quad (25)$$

Wegen des Zusammenhanges (24) berechnet sich der *Schalldruckpegel* L_p aus der Schalldruckamplitude \hat{p} zu

$$\boxed{\frac{L_p}{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \right)^2 = 20 \cdot \log_{10} \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0}.} \quad (26)$$

Schallintensitätspegel und Schalldruckpegel hängen über die Schallimpedanz Z fest zusammen. Diese wiederum ist als Produkt aus Dichte und Schallgeschwindigkeit temperatur-, druck- und medienabhängig. Solange Z jedoch konstant ist, ändern sich Schallintensitätspegel und Schalldruckpegel stets um den gleichen Zahlenwert (vergleiche

Abschnitt 3.1). Diese Sachverhalte werden leider häufig durcheinandergeworfen und falsch wiedergegeben. Weil die abgestrahlte Gesamtleistung divergiert und sich mit wachsendem Abstand r von der Schallquelle auf eine mit r^2 wachsende Gesamtfläche verteilt, nimmt aufgrund der Energieerhaltung die Schallintensität I auch in einem verlustfreien Medium bei zunehmender Entfernung proportional zu $1/r^2$ ab. Daraus folgt, dass die Schalldruckamplitude \hat{p} wegen $\hat{p} \sim \sqrt{I}$ proportional zu $1/r$ abnimmt. Beides hat zur Folge, dass sowohl der Schallintensitätspegel L_I als auch der Schalldruckpegel L_p um 20 dB je Abstandsdekade abnehmen. Falsch ist jedoch die häufig anzutreffende Aussage, der Schallintensitätspegel nehme proportional zu $1/r^2$ ab. Die Pegel sind logarithmische Größen und es liegt wiederum an der Eigenschaft (1) des Logarithmus, dass die Multiplikation der Schallintensität I mit einem Faktor (hier: r_2^2/r_1^2) auf eine Zahlenwertdifferenz beim zugehörigen Schallintensitätspegel L_I abgebildet wird (hier: -20 dB je Abstandsdekade oder -6 dB bei Abstandsverdoppelung). In Tabelle 2 auf der nächsten Seite sind einige dieser stetig wiederkehrenden aber falschen Formulierungen korrigiert.

Ebenfalls über den Zusammenhang (24) findet man, dass der zu I_0 korrespondierende Bezugsdruck

$$\hat{p}_0 = \sqrt{2 \cdot I_0 \cdot \rho \cdot c} = \sqrt{2 \cdot I_0 \cdot Z} \quad (27)$$

ist. Wählt man \hat{p}_0 entsprechend (27), dann haben der Schalldruckpegel und der Schallintensitätspegel den gleichen Zahlenwert³. Für Luft im Normzustand ($T_0 = 273,15$ K, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa) erhält man $\hat{p}_0 = 2,8 \cdot 10^{-5}$ Pa, was einem Effektivwert von $\hat{p}_{0,\text{eff}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa entspricht [5].

Im Gegensatz zu den bisher eingeführten physikalischen Kenngrößen einer Schallwelle ist die Bewertung ihrer *Lautstärke* dem subjektiven Empfinden unterworfen, welches außer vom Individuum auch von der Frequenz abhängt. Bei der Einführung eines Maßes für die Lautstärke spielen daher die durchschnittlichen Eigenschaften des menschlichen Gehörs eine wesentliche Rolle. Als Maß für die Lautstärke eines beliebigen Tones verwendet man den Schalldruckpegel, den ein rein harmonischer Ton (Sinuston) der Frequenz 1 kHz haben müsste, damit er als gleich laut *empfunden* wird. Um zu verdeutlichen, dass es sich hierbei um die empfundene Lautstärke und nicht um den tatsächlichen Schalldruckpegel handelt, verwendet man für den Lautstärkepegel anstelle des Dezibel die Einheit phon. Der Schalldruckpegel $L_p = 0$ dB entspricht bei 1 kHz (in etwa) der Hörgrenze, $L_p = 130$ dB ist die Schmerzschwelle. Dem entsprechend reicht der Wertebereich des Lautstärkepegels von 0 phon bis 130 phon, wobei der Zahlenwert des zugehörigen Schalldruckpegels im Allgemeinen ein anderer ist. Der in den Eigenschaften des menschlichen Gehörs begründete nichtlineare Zusammenhang zwischen empfundener Lautstärke, Frequenz und tatsächlichem Schalldruckpegel ist im Hörflächendiagramm in Form der Kurven gleicher Lautstärkepegel (Isophonen) dokumentiert. Dort wird jedem Wertepaar aus Frequenz und Schalldruckpegel über die Isophonen ein Lautstärkepegel zugeordnet.

³Der in (26) eingeführte Bezugsdruck \hat{p}_0 für die Schalldruckamplitude \hat{p} ist nicht zu verwechseln mit dem im Schalldruck (20) enthaltenen Gleichdruck p_0 .

Tabelle 2: Häufig gebrauchte falsche Formulierungen im Zusammenhang mit Schallgrößen

Falsche Formulierung	Richtige Version
<i>Der Schalldruck nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r$ ab.*</i>	Die Schalldruckamplitude nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r$ ab.*
<i>Die Schalldruckamplitude nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab.</i>	Die Schalldruckamplitude nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r$ ab.
<i>Der Schalldruckpegel nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab.</i>	Die Schalldruckamplitude nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r$ ab. Die Schallintensität nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab. Der Schalldruckpegel nimmt bei zunehmender Entfernung um 20 dB je Entfernungsdekade ab. Bei Verdoppelung des Abstandes nimmt er um 6 dB ab.
<i>Der Schallintensitätspegel nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab.</i>	Die Schallintensität nimmt bei zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab. Der Schallintensitätspegel nimmt bei zunehmender Entfernung um 20 dB je Entfernungsdekade ab. Bei Verdoppelung des Abstandes nimmt er um 6 dB ab.

*Siehe Anmerkung 4 auf Seite 11.

Eine Abstraktion des Hörflächendiagramms stellen vier standardisierte Bewertungskurven mit den Bezeichnungen A–D dar, welche den tatsächlichen Frequenzgang der menschlichen Lautstärkeempfindung in Abhängigkeit der Frequenz und des Lautstärkepegels schematisieren. Es handelt sich dabei um die Betragsfrequenzgänge $|H_x(j\omega)|$ von vier Modellfiltern mit den Übertragungsfunktionen

$$H_A(s) = \frac{7,39705 \cdot 10^9 \cdot s^4}{(s + 129,4)^2 \cdot (s + 76655)^2 \cdot (s + 676,7) \cdot (s + 4636)}, \quad (28a)$$

$$H_B(s) = \frac{5,99185 \cdot 10^9 \cdot s^3}{(s + 129,4)^2 \cdot (s + 76655)^2 \cdot (s + 995,9)}, \quad (28b)$$

$$H_C(s) = \frac{5,91797 \cdot 10^9 \cdot s^2}{(s + 129,4)^2 \cdot (s + 76655)^2}, \quad (28c)$$

$$H_D(s) = \frac{91104,32 \cdot s \cdot (s^2 + 6532 \cdot s + 4,0975 \cdot 10^7)}{(s + 1776,3) \cdot (s + 7288,5) \cdot (s^2 + 21514 \cdot s + 3,8836 \cdot 10^8)}, \quad (28d)$$

wobei »x« die Bezeichnungen A–D repräsentiert. Die Bezugsgröße ist dabei wiederum die Lautstärkeempfindung bei der Frequenz 1 kHz, weshalb die Betragsfrequenzgänge aller Modellfilter bei dieser Frequenz den Wert 1 oder 0 dB haben (siehe Abb. 2 auf der nächsten Seite). Der nach diesen Kurven *bewertete Schalldruckpegel* L_{px} ergibt sich aus

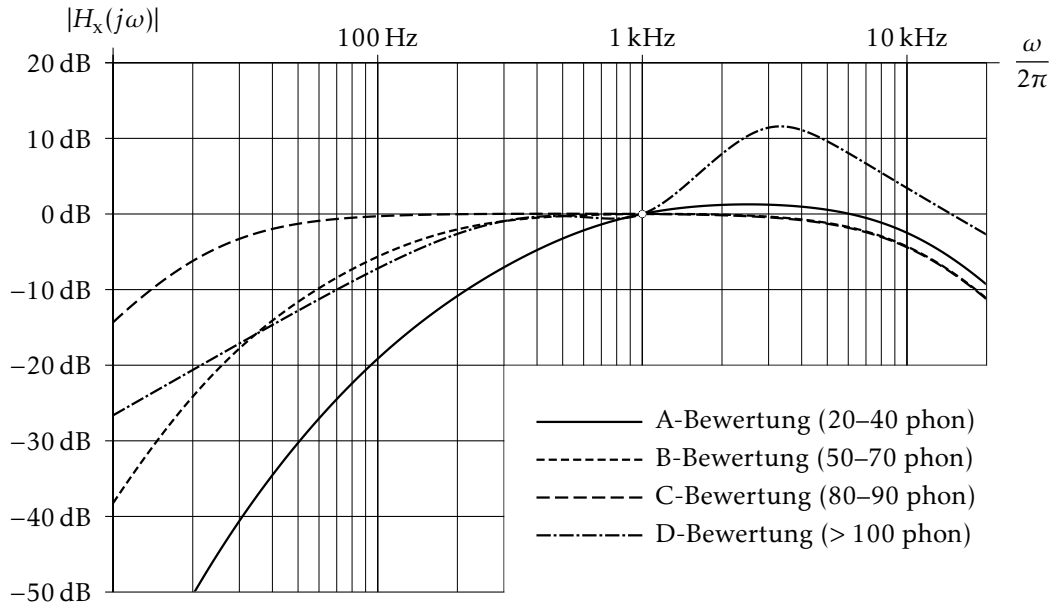


Abb. 2: Bewertungskurven zur Berücksichtigung des Frequenzganges des menschlichen Gehörs als Zusammenhang zwischen Schalldruckpegel und Lautstärkepegel im Frequenzbereich 10 Hz bis 20 kHz

dem Schalldruckpegel L_p nach der Zahlenwertgleichung

$$\frac{L_{px}(\omega)}{\text{dB}(x)} = \frac{L_p(\omega)}{\text{dB}} + \frac{|H_x(j\omega)|}{\text{dB}}. \quad (29)$$

Man erkennt, dass zu niedrigen Frequenzen hin ein immer höherer Schalldruckpegel notwendig ist, um die gleiche Lautstärkeempfindung hervorzurufen. Liegt der Angabe des Lautstärkepegels beispielsweise eine Gewichtung des Schalldruckpegels entsprechend der Kurve A zugrunde, so kennzeichnet man dies durch die Verwendung der Einheit dB(A) anstelle des phon. Beide Pegel­einheiten phon und dB(A) berücksichtigen auf unterschiedliche aber ähnliche Weise den Frequenzgang des menschlichen Gehörs, der zu einem nichtlinearen frequenz- und pegelabhängigen Zusammenhang zwischen Lautstärkepegel und Schalldruckpegel führt.

Dieser nichtlineare und nur empirisch bestimmbare Zusammenhang zwischen Lautstärkepegel (einer Empfindung) und Schalldruckpegel (einer das Schallfeld kennzeichnenden physikalischen Größe) ist auch der Grund dafür, dass für die Lautstärke kein geschlossen darstellbares Abstandsgesetz angegeben werden kann, wie das für den Schalldruck oder die Schallintensität und deren Pegel der Fall ist. Lediglich näherungsweise gilt die Faustformel, dass eine Verringerung des Schalldruckpegels (und damit auch des Schallintensitätspegels) um 10 dB als Halbierung der Lautstärke empfunden wird. Da der Schallintensitätspegel bei Freiraumausbreitung mit zunehmender Entfernung von der Schallquelle mit 20 dB je Dekade abnimmt, tritt eine Abnahme um 10 dB bei einer Abstandsvergrößerung um den Faktor $\sqrt{10} \approx 3,16$ ein. Führt man diese Näherung fort, so lässt sich überschlägig sagen, dass sich die Lautstärke halbiert, wenn sich der Abstand um einen Faktor 3–4 vergrößert.

Anmerkung 5 Der Zahlenwert des bewerteten Schalldruckpegels liegt trotz seiner Bezeichnung sehr viel näher am Zahlenwert des Lautstärkepegels in phon als am Zahlenwert des Schalldruckpegels im Schallwellenfeld. Die Bezeichnung »bewerteter Schalldruckpegel« ist üblich und auch formal richtig [4]. Das Ergebnis der Bewertung ist jedoch im Grunde ein Maß für den Lautstärkepegel und nicht mehr für den Schalldruckpegel. Man könnte daher den »x-bewerteten Schalldruckpegel« seiner eigentlichen Bedeutung folgend (und deshalb aus Sicht des Autors weniger irreführend) ebenso als »Lautstärkepegel entsprechend der Bewertungskurve x« bezeichnen. Falsch wird die Aussage sicher dann, wenn der Hinweis auf die Bewertung völlig entfällt und eine beispielsweise in dB(A) angegebene Größe beiläufig einfach als »Schalldruckpegel« bezeichnet wird.

Beispiel 7 Welche Änderung ergäbe sich für die Ordinatenkala in Abb. 2 auf der vorherigen Seite, wenn anstelle von $|H_x(j\omega)|$ der Wert von $|H_x(j\omega)|^2$ in dB aufgetragen würde?

Es ergäbe sich keine Änderung, siehe Abschnitt 2. Der Wert von $|H_x(j\omega)|^2$ entspricht der Leistungsübertragungsfunktion der Filter, daher würde auf der Ordinate der Zahlenwert von $10 \log_{10} |H_x(j\omega)|^2 = 20 \log_{10} |H_x(j\omega)|$ aufgetragen. Das ist derselbe Wert, wie bei der logarithmischen Darstellung des Betrages $|H_x(j\omega)|$ der Spannungsübertragungsfunktion.

3.5. Das Dezibel in der Radarmeteorologie

Eine elementare Methode der Radarmeteorologie ist die Messung der Reflektivität Z der Auflösungszellen eines Pulsradars und der anschließende Rückschluss von diesen Messwerten auf die in den Auflösungszellen herrschende Niederschlagsrate R . Weil die Zahlenwerte von Z ebenfalls mehrere Größenordnungen überstreichen, wird auch hier das Dezibel als Quasi-Einheit benutzt. Zur Einführung dieser meteorologischen Einheit soll hier zunächst die Bedeutung des Parameters Z und des verwendeten Bezugswertes Z_0 erläutert werden. Ausgangspunkt sei die monostatische Radargleichung

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G^2 \cdot \lambda_0^2}{(4\pi)^3 r^4} \cdot \sigma, \quad (30)$$

welche das Verhältnis zwischen Empfangsleistung P_E und Sendeleistung P_S in Abhängigkeit des Antennengewinns G , der Signalwellenlänge λ_0 , des Zielabstands r und des Rückstreuquerschnitts σ des Zieles angibt [10]. In der Meteorologie entsteht die Rückstreuung typischerweise jedoch nicht durch ein einzelnes Ziel sondern durch eine Vielzahl von Hydrometeoren (beispielsweise Regentropfen, Hagelkörner oder Schneeflocken) innerhalb jeder Auflösungszelle. Das Volumen einer Auflösungszelle ist näherungsweise

$$V \approx \frac{\pi}{4} (r \cdot \Theta) (r \cdot \Phi) \frac{c_0 \tau}{2}, \quad (31)$$

wobei τ die Dauer eines einzelnen Radarimpulses und Θ und Φ die Halbwertsbreiten des Antennendiagramms darstellen. Der Faktor $\pi/4$ berücksichtigt die elliptische Form des Strahlquerschnitts. Zur Berechnung des gesamten Rückstreuquerschnitts einer Auflösungszelle modellieren wir die Hydrometeore als Kugeln mit der relativen Permittivität ϵ_r und nehmen ferner an, dass ihr Durchmesser D deutlich kleiner als die Radarwellenlänge λ_0 sei⁴. In diesem Fall befinden wir uns im Bereich der Rayleigh-

⁴Beispielsweise arbeiten die Wetterradarsysteme des Deutschen Wetterdienstes im C-Band mit einer Trägerfrequenz von $f = 5,64 \text{ GHz}$, was einer Wellenlänge von $\lambda_0 = 5,32 \text{ cm}$ entspricht.

Streuung, sodass der Rückstreuquerschnitt eines einzelnen Tropfens durch

$$\sigma(D) = \frac{\pi^5}{\lambda_0^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \cdot D^6 \quad (32)$$

gegeben ist⁵. Führt man zur Beschreibung der statistischen Streukörperverteilung die Tröpfchengrößenverteilung $N(D)$ ein, welche die Häufigkeit des Tröpfchendurchmessers D pro infinitesimalem Volumen dV angibt, dann ist $N(D)dD$ die Volumendichte der Tröpfchen mit Durchmesser D . Damit ist dann

$$d\sigma' = \sigma(D) \cdot N(D) dD \quad (33)$$

die volumenbezogene Dichte des Rückstreuquerschnitts, der von Tröpfchen mit dem Durchmesser D herrührt und

$$\eta = \int_0^{\infty} d\sigma' = \int_0^{\infty} \sigma(D) \cdot N(D) dD \quad (34)$$

der gesamte volumenbezogene Rückstreuquerschnitt. Setzt man hier den Rückstreuquerschnitt entsprechend dem Rayleigh-Modell (32) ein, so erhält man für η den Ausdruck

$$\eta = \frac{\pi^5}{\lambda_0^4} \cdot |K|^2 \cdot \int_0^{\infty} D^6 \cdot N(D) dD = \frac{\pi^5}{\lambda_0^4} \cdot |K|^2 \cdot Z \quad (35)$$

mit $|K|^2 = |(\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)|^2$ und

$$Z = \int_0^{\infty} D^6 \cdot N(D) dD. \quad (36)$$

Nimmt man vereinfachend an, dass η innerhalb einer Auflösungszelle mit dem Volumen nach (31) konstant sei, dann ist der gesamte Rückstreuquerschnitt einer Auflösungszelle $\sigma = \eta \cdot V$ und damit ergibt sich aus (30) die *meteorologische Radargleichung*

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G^2 \cdot \lambda_0^2 \cdot \Theta \cdot \Phi \cdot c_0 \tau}{1024 \cdot \ln 2 \cdot \pi^2 \cdot r^2} \cdot \eta, \quad (37)$$

⁵Die Angabe des Rückstreuquerschnitts in der Form (32) ist in der Radarmeteorologie weit verbreitet. Gegenüber der exakten Herleitung in [7] fehlt jedoch in (32) und damit auch in (38) auf der nächsten Seite ein nicht unerheblicher Faktor von 2/3. Sachkundige Hinweise auf die Begründung werden vom Autor unter der E-Mail-Adresse tutorien@siart.de dankbar entgegengenommen. Mutmaßung: Die Erhöhung um den Faktor 3/2 berücksichtigt die in Wirklichkeit abgeplattete Form der Regentropfen, wodurch sich der Streuquerschnitt bei horizontaler Polarisation gegenüber einer Kugel vergrößert.

wobei noch ein Faktor $1/(2\ln 2)$ zur Berücksichtigung der Verkleinerung von V durch das zweimalige Durchlaufen der Antennencharakteristik unter Annahme einer gaußförmigen Charakteristik eingeführt wurde. Berücksichtigt man ferner, dass $\pi^2/(\Theta \cdot \Phi)$ in etwa gleich dem Antennengewinn G ist, dann erhält man durch Einsetzen von (35) und (36) die geläufige Form

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{\pi^5 \cdot G \cdot c_0 \tau}{1024 \cdot \ln 2 \cdot r^2 \cdot \lambda_0^2} \cdot |K|^2 \cdot Z. \quad (38)$$

Der Wert von $|K|^2$ ist wie ϵ_r abhängig von der Materialart, der Temperatur und der Frequenz. Für Wasser bei 10°C und $\lambda_0 = 10\text{ cm}$ ist er in etwa 0,93. Der Parameter Z heißt *Radar-Reflektivität* und ist entsprechend seiner Definition (36) das sechste Moment der Tröpfchengrößenverteilung $N(D)$ [6]. Er hat in (38) die Dimension m^6/m^3 , in der Meteorologie wird er jedoch üblicherweise in der Einheit mm^6/m^3 angegeben. Weil er, wie oben erwähnt, mehrere Größenordnungen überstreichen kann, wird er häufig in Bezug auf $Z_0 = 1\text{ mm}^6/\text{m}^3 = 1 \cdot 10^{-18}\text{ m}^6/\text{m}^3$ und logarithmiert angegeben, was durch den Zusatz dBz gekennzeichnet wird. Es ist damit

$$\frac{z}{\text{dBz}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{Z}{Z_0} \quad \text{mit} \quad Z_0 = 1\text{ mm}^6/\text{m}^3. \quad (39)$$

Ergänzend sei noch erwähnt, dass zwischen der Reflektivität Z und der Niederschlagsrate R ein teilweise empirischer Zusammenhang besteht, der durch die Zahlenwertgleichung

$$\frac{Z}{\text{mm}^6/\text{m}^3} = a \cdot \left(\frac{R}{\text{mm/h}} \right)^b \quad (40)$$

mit $a \in [200; 600]$ und $b \in [1,5; 2]$ beschrieben wird. Mit den häufig zutreffenden Werten $a = 200$ und $b = 1,6$ bezeichnet man (40) als *Marshall-Palmer-Beziehung*.

Literatur

- [1] BALANIS, C. A.: *Antenna Theory. Analysis and Design*. 3. Aufl. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2005
- [2] COLLIN, R. E.: *Antennas and Radiowave Propagation*. New York : McGraw-Hill, 1985
- [3] DETLEFSEN, J. ; SIART, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 3. Aufl. München : Oldenbourg, 2009
- [4] DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR AKUSTIK E. V. (Hrsg.): *DEGA-Empfehlung 101: Akustische Wellen und Felder*. Berlin: Deutsche Gesellschaft für Akustik e. V., März 2006. – http://www.dega-akustik.de/publikationen/DEGA_Empfehlung_101.pdf
- [5] DOBRINSKI, P. ; KRAKAU, G. ; VOGEL, A.: *Physik für Ingenieure*. 7. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1988
- [6] HENDRANTORO, G. ; ZAWADZKI, I.: Derivation of Parameters of Y-Z Power-Law Relation From Raindrop Size Distribution Measurements and Its Application in the Calculation of Rain Attenuation From Radar Reflectivity Factor Measurements. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* AP-51 (2003), January, Nr. 1, S. 12–22
- [7] ISHIMARU, A.: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1991
- [8] OGUCHI, T.: Electromagnetic Wave Propagation and Scattering in Rain and Other Hydrometeors. In: *Proc. IEEE* 71 (1983), September, Nr. 9, S. 1029–1078
- [9] OLSEN, R. ; ROGERS, D. ; HODGE, D.: The aR^b Relation in the Calculation of Rain Attenuation. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* AP-26 (1978), March, Nr. 2, S. 318–329
- [10] SKOLNIK, M. I.: *Introduction to Radar Systems*. Auckland : McGraw-Hill, 1980
- [11] ZWICKER, E.: *Psychoakustik*. Berlin : Springer, 1982

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
D	m	Tröpfchendurchmesser
G	1	Gewinn
G	1, dBi	Antennengewinn bezogen auf isotrope Abstrahlung
G_P	1	Leistungsverstärkung
G_U	1	Spannungsverstärkung
$H(s)$	1	Übertragungsfunktion
I	W/m ²	Schallintensität
I_0	W/m ²	Bezugs-Schallintensität
L_I	dB	Schallintensitätspegel (Bezug: $I_0 = 10^{-12}$ W/m ²)
L_N	dBm	Rauschpegel
L_P	dBm	Leistungspegel
L_U	dB μ V	Spannungspegel
L_p	dB	Schalldruckpegel (Bezug: $\hat{p}_{0,\text{eff}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa)
L_{px}	dB(x)	x-bewerteter Schalldruckpegel
N	W	Rauschleistung
$N(D)$	1/(m ³ ·m)	Tröpfchengrößenverteilung
P	W	Leistung
P_1	W	Eingangsleistung
P_2	W	Ausgangsleistung
P_E	W	Empfangsleistung
P_S	W	Sendeleistung
R	mm/h	Niederschlagsrate
R	Ω	Widerstand
R_1	Ω	Eingangswiderstand
R_2	Ω	Ausgangswiderstand
S_*	W/m ²	Strahlungsleistungsdichte
T	K	Temperatur
T	s	Periodendauer
U	V	Spannung
U_1	V	Eingangsspannung
U_2	V	Ausgangsspannung
Z	kg/(m ² s)	Schallimpedanz
Z	m ⁶ /m ³	Radar-Reflektivität (Reflektivitätsfaktor)
Z_L	Ω	Leitungswellenwiderstand
Δf	1/s	Bandbreite
Θ, Φ	rad	Halbwertsbreite, Antennenöffnungswinkel
η	m ² /m ³	volumenbezogener Radarrückstreuquerschnitt
\hat{p}	Pa	Schalldruckamplitude
\hat{p}_0	Pa	Bezugsdruck
\hat{v}	m/s	Schallschnelle

Symbol	Einheit	Bedeutung
λ	m	Wellenlänge
λ_0	m	Wellenlänge im Vakuum
ω	rad/s	Kreisfrequenz
ρ	kg/m ³	Dichte
σ	m ²	Radarrückstreuquerschnitt
ξ	m	Schallausschlag
c	m/s	Schallgeschwindigkeit
c_0	m/s	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
f	1/s	Frequenz
k	J/K	Boltzmann-Konstante
k	rad/m	Wellenzahl
p	Pa	Schalldruck
p_0	Pa	Gleichdruck
r	m	Abstand
r, ϑ, φ	m, rad, rad	Kugelkoordinaten
t	s	Zeit
x	m	Längenkoordinate
z	dBz	logarithmierte Radar-Reflektivität (Bezug: $Z_0 = 1 \text{ mm}^6/\text{m}^3$)

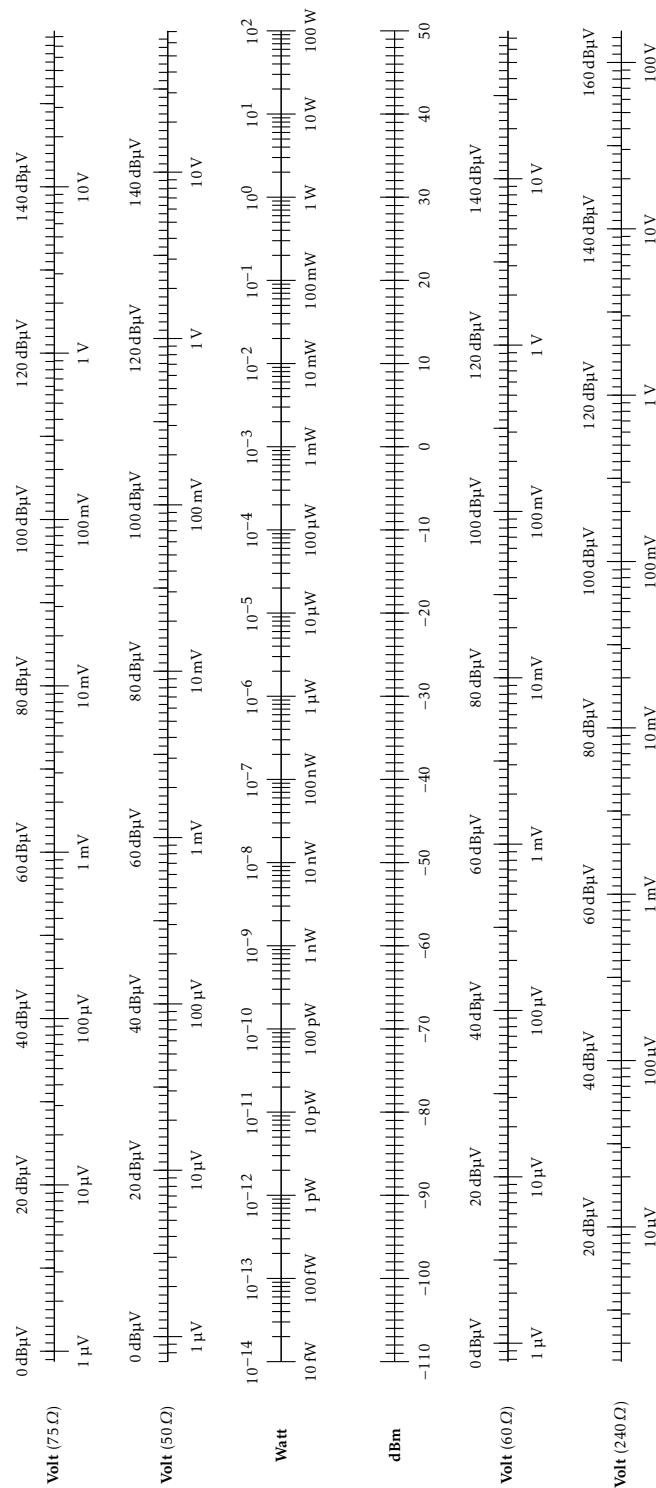


Abb. 3: Nomogramme zur Umrechnung zwischen Spannungspegel (Effektivwert) und Leistungspegel. Auf den beiden mittleren Skalen ist der Leistungspegel in Watt und in dBm aufgetragen. Die übrigen Skalen zeigen die zugehörigen Spannungspegel in Volt und in dB μ V bei verschiedenen Impedanzniveaus. Die Leistungsskalen können für sich alleine auch zur Umrechnung zwischen Watt und dBm benutzt werden. Ebenso ist jede Spannungsskala ein Nomogramm zur Umrechnung zwischen Volt und dB μ V, wobei das Impedanzniveau irrelevant ist.