

Fourieranalyse kontinuierlicher und abgetasteter Signale

URL: <http://www.siart.de/lehre/fourier.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

26. Juni 2010 (Version 0.24)

Inhaltsverzeichnis

1. Spektren von Funktionen	1
2. Spektren von Folgen	3
3. Fourierreihen	5
4. Diskrete Fouriertransformation	6

1. Spektren von Funktionen

Einer Funktion $v(t)$ wird über das Fouriertransformationspaar

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1a)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1b)$$

eine Funktion $V(j\omega)$ zugeordnet, die man das *Spektrum* der Funktion $v(t)$ nennt. Man erkennt, dass $v(t)$ durch diese Transformation dargestellt wird als Überlagerung von (unendlich vielen) komplexen Schwingungen der Form $e^{j\omega t}$. Sie haben die infinitesimalen komplexen Amplituden $V(j\omega)d\omega$, weshalb man $V(j\omega)$ auch als *spektrale Amplitudendichte* oder kurz *Spektraldichte* bezeichnet. Damit das Fouriertransformationsintegral (1a) existiert, muss $v(t)$ absolut integrierbar sein und darf in einem beschränkten Intervall auch nur eine endliche Bogenlänge haben. Die meisten praktisch relevanten

Funktionen erfüllen diese Voraussetzung. Die Zuordnung von Funktion und Fourier-spektrum wird in der Schreibweise

$$v(t) \circ\bullet V(j\omega)$$

mit dem Korrespondenzsymbol dargestellt. Von der Definition (1) der Fouriertransformation lassen sich unter anderem folgende Eigenschaften ableiten:

$$\sum_v a_v v_v(t) \circ\bullet \sum_v a_v V_v(j\omega) \quad \text{Linearität} \quad (2a)$$

$$v(t - t_0) \circ\bullet e^{-j\omega t_0} \cdot V(j\omega) \quad \text{Verschiebung} \quad (2b)$$

$$e^{j\omega_0 t} \cdot v(t) \circ\bullet V(j(\omega - \omega_0)) \quad \text{Modulation} \quad (2c)$$

$$v(at) \circ\bullet \frac{1}{|a|} V\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{Ähnlichkeit} \quad (2d)$$

$$V(jt) \circ\bullet 2\pi \cdot v(-\omega) \quad \text{Symmetrie} \quad (2e)$$

$$\frac{d^\mu v(t)}{dt^\mu} \circ\bullet (j\omega)^\mu \cdot V(j\omega) \quad \text{Differenziation von } v(t) \quad (2f)$$

$$(-t)^\mu \cdot v(t) \circ\bullet \frac{d^\mu V(j\omega)}{d(j\omega)^\mu} \quad \text{Differenziation von } V(j\omega) \quad (2g)$$

$$v_1(t) * v_2(t) \circ\bullet V_1(j\omega) \cdot V_2(j\omega) \quad \text{Faltung} \quad (2h)$$

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \circ\bullet \frac{1}{2\pi} V_1(j\omega) * V_2(j\omega) \quad \text{Multiplikation} \quad (2i)$$

Zerlegt man $v(t)$ und $V(j\omega)$ in ihre Real- und Imaginärteile und diese wiederum in ihre geraden und ungeraden Anteile, dann gelten folgende Korrespondenzen:

$$\begin{array}{l} v(t) = v_g^{(R)}(t) + v_u^{(R)}(t) + jv_g^{(I)}(t) + jv_u^{(I)}(t) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ V(j\omega) = V_g^{(R)}(j\omega) + V_u^{(R)}(j\omega) + jV_g^{(I)}(j\omega) + jV_u^{(I)}(j\omega). \end{array}$$

Dabei bezeichnen die tiefgestellten Indizes »g« und »u« den geraden und den ungeraden Anteil und die hochgestellten Indizes »(R)« und »(I)« den Real- und den Imaginärteil. Aus diesen Korrespondenzen folgt insbesondere, dass

$$v(-t) \circ\bullet V(-j\omega) \quad \text{und} \quad v^*(t) \circ\bullet V^*(-j\omega)$$

und dass die Fouriertransformierte einer rein reellen Funktion $v(t)$ konjugiert gerade ist.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich von bereits bekannten Transformationspaaren weitere Korrespondenzen ableiten. Einige nützliche Korrespondenzen für diesen Zweck sind:

$$\delta_0(t) \circ \bullet 1 \quad (3a)$$

$$\delta_0(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} \quad (3b)$$

$$1 \circ \bullet 2\pi \cdot \delta_0(\omega) \quad (3c)$$

$$e^{j\omega_0 t} \circ \bullet 2\pi \cdot \delta_0(\omega - \omega_0) \quad (3d)$$

$$\cos(\omega_0 t) \circ \bullet \pi \cdot \left(\delta_0(\omega - \omega_0) + \delta_0(\omega + \omega_0) \right) \quad (3e)$$

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet -j\pi \cdot \left(\delta_0(\omega - \omega_0) - \delta_0(\omega + \omega_0) \right) \quad (3f)$$

$$\delta_{-1}(t) \circ \bullet \pi \delta_0(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3g)$$

Dabei sind $\delta_0(t)$ die Dirac-Delta-Distribution (Impulsfunktion) und $\delta_{-1}(t)$ die Sprungfunktion. Aus deren Spektren lässt sich eine Vielzahl weiterer Korrespondenzen mit Hilfe der Eigenschaften (2) und den Zerlegungen

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (4a)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (4b)$$

ableiten. Beispielsweise lässt sich der Rechteckimpuls in der Form

$$\text{rect}(t) = \delta_{-1}(t + 1/2) - \delta_{-1}(t - 1/2) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

darstellen als Überlagerung zweier verschobener Sprungfunktionen. Daraus folgt auf einfache Weise das Spektrum eines um $t = 0$ zentrierten Rechteckimpulses der Dauer T sowie umgekehrt die zu einem konstanten Tiefpassspektrum mit Grenzfrequenz ω_g gehörende Impulsform im Zeitbereich:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \circ \bullet T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (6a)$$

$$\frac{\omega_g}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_g t/2)}{\omega_g t/2} \circ \bullet \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right). \quad (6b)$$

Diese Zusammenhänge sind in Abb. 1 grafisch und in normierter Form dargestellt.

2. Spektren von Folgen

Das Spektrum einer Folge $v[k]$ ist definiert durch

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] \cdot e^{-j\Omega k} = \mathcal{F}_*\{v[k]\} \quad (7a)$$

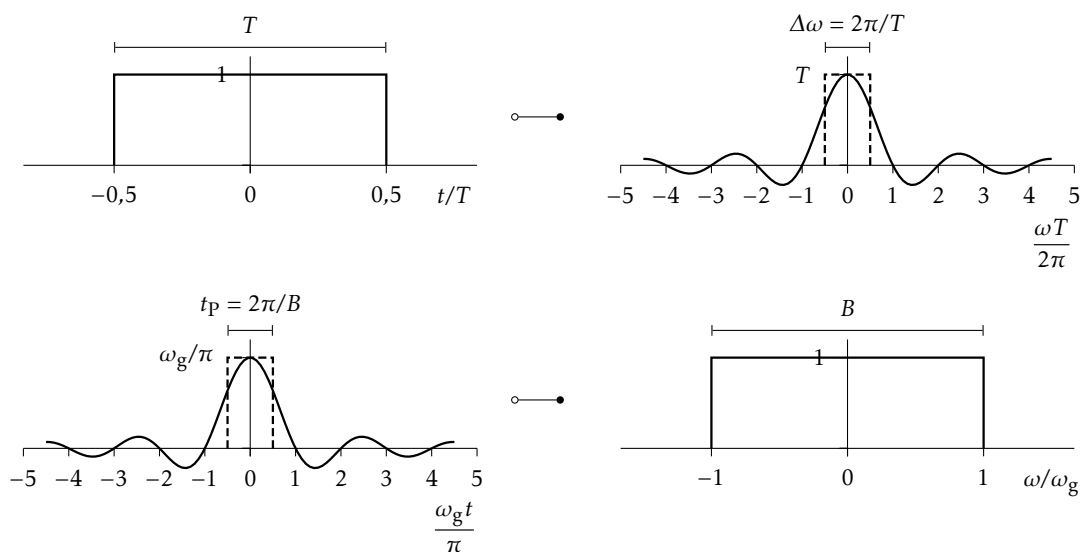


Abb. 1: Fouriertransformationspaare von Rechteckfunktionen

und die Folgenglieder erhält man durch die Rücktransformation

$$v[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega k} d\Omega = \mathcal{F}_*^{-1}\{V(e^{j\Omega})\}. \quad (7b)$$

Das Spektrum $V(e^{j\Omega})$ einer zeitdiskreten Funktion (einer Folge) ist offensichtlich periodisch in Ω mit der Periode 2π .

Darstellung abgetasteter Funktionen

Durch Abtastung einer kontinuierlichen Funktion $v(t)$ mit dem Abtastintervall T an den Zeitpunkten $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, entsteht die Folge $v[k] = v(kT)$ der Abtastwerte. Bei Abtastung einer periodischen Funktion $e^{j\omega t}$ bzw. $\sin(\omega t)$ ergeben sich mit der normierten Frequenz $\Omega = \omega T$ die Darstellungen $e^{jk\Omega}$ bzw. $\sin(k\Omega)$ für die entsprechenden Abtastfolgen. Der Wert der normierten Frequenz Ω stellt also das Winkelinkrement zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastwerten dar. Die Abtastung einer periodischen Funktion ist eindeutig, solange das Winkelinkrement Ω ein Intervall der Breite 2π nicht verlässt. Falls Ω negative Werte annehmen kann, ist also $-\pi \leq \Omega < \pi$ zu fordern. Wenn sichergestellt ist, dass Ω positiv ist, so muss für die Eindeutigkeit $0 \leq \Omega < 2\pi$ gewährleistet sein.

Spektren abgetasteter Funktionen

Betrachtet man

$$V(j\omega) = \mathcal{F}\{v_0(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

und

$$V(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}_*\{v[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] \cdot e^{-j\Omega k}, \quad \Omega = \omega T$$

so erhält man den Ausdruck für $V(e^{j\Omega})$ durch numerische Auswertung des Fourierintegrals mit Hilfe der Rechteckregel (bis auf den Faktor T). Weil $V(e^{j\Omega})$ eine periodische Funktion ist, kann die näherungsweise Übereinstimmung aber nur für eine Periode $|\omega| \leq \pi/T$ gelten. Es stellt sich heraus, dass

$$V(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} V_0[j(\Omega + 2\mu\pi)/T] \quad (8)$$

bis auf den möglichen Unterschied einer Nullfunktion gilt. Das Spektrum der Folge $v[k]$ ist also eine Überlagerung verschobener Spektren der Funktion $v_0(t)$ [12].

3. Fourierreihen

Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe einer periodischen Funktion $v(t) = v(t + \tau)$ sind

$$c_\nu = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t) e^{-j\nu\omega_0 t} dt \quad (9)$$

mit $\omega_0 = 2\pi/\tau$. Mit ihnen gilt

$$g(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu\omega_0 t}, \quad (10)$$

wobei die Übereinstimmung zwischen Fourier-Reihendarstellung und Originalfunktion durch

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} |v(t) - g(t)|^2 dt = 0 \quad (11)$$

gegeben ist. Für rein reelle Zeitfunktionen $v(t)$ folgt zunächst $c_{-v} = c_v^*$ und daraus mit $c_v = |c_v|e^{j\varphi_v}$

$$g(t) = c_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} |c_v| \cos(v\omega_0 t + \varphi_v). \quad (12)$$

Die komplexe Fourierreihe (10) lässt sich auch durch reelle Sinus- und Kosinusreihen in der Form

$$g(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{jv\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos(v\omega_0 t) + \sum_{v=1}^{\infty} b_v \sin(v\omega_0 t) \quad (13)$$

schreiben. Dabei gilt

$$2c_v = \begin{cases} a_0 & \text{für } v = 0 \\ a_v - jb_v & \text{für } v > 0 \\ a_{-v} + jb_{-v} & \text{für } v < 0 \end{cases} \quad (14)$$

also

$$a_0 = 2c_0 \quad (15a)$$

$$a_v = \operatorname{Re}\{c_{-v} + c_v\} \quad (15b)$$

$$b_v = \operatorname{Im}\{c_{-v} - c_v\} \quad (15c)$$

4. Diskrete Fouriertransformation

Für eine in k periodische Folge $\tilde{v}[k]$ mit der Periode M gilt

$$\tilde{v}[k] = \sum_{v=0}^{M-1} \tilde{c}_v e^{jvk2\pi/M} \quad (16)$$

wenn

$$\tilde{c}_v = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}[k] e^{-jvk2\pi/M} \quad (17)$$

gewählt wird. Auf diese Weise existiert eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen M Werten $\tilde{v}[k]$ und M Werten \tilde{c}_v . Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Fourierreihe periodischer Folgen und den Fourierkoeffizienten periodischer Funktionen, der sich erschließt, wenn man annimmt, dass die hier betrachtete periodische Folge $\tilde{v}[k]$ durch Abtastung einer periodischen Funktion $v_0(t)$ in den Zeitpunkten $t = k\tau/M$ entstanden ist. Durch den Vergleich von

$$v_0(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{jv\omega_0 t}$$

mit

$$\tilde{v}[k] = v_0(t = k\tau/M) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{j\nu k 2\pi/M}$$

folgt

$$\tilde{c}_\nu = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{\nu+rM} = \tilde{c}_{\nu+\lambda M} \quad ; \quad \lambda, \nu \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Die Werte \tilde{c}_ν stimmen mit den c_ν überein, wenn

$$c_\nu = 0 \quad \forall |\nu| > n \quad (19)$$

gilt. Wählt man $M \geq 2n + 1$, so ist

$$\tilde{c}_\nu = \begin{cases} c_\nu & \text{für } \nu = 0(1)[M/2] \\ c_{\nu-M} & \text{für } \nu = ([M/2] + 1)(1)(M-1). \end{cases} \quad (20)$$

Dabei ist $[M/2]$ die größte ganze Zahl $\leq M/2$.

Diskrete Fouriertransformation

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) wird durch die umkehrbar eindeutigen Zuordnungen

$$V[\mu] = \text{DFT}\{v[k]\} = \sum_{k=0}^{M-1} v[k] \cdot w_M^{\mu k}, \quad \mu = 0, 1, \dots, M-1 \quad (21a)$$

$$v[k] = \text{DFT}^{-1}\{V[\mu]\} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V[\mu] \cdot w_M^{-\mu k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (21b)$$

mit $w_M = e^{-j2\pi/M}$ als eigenständige Operation definiert. Der Bezug zur Fourierreihe periodischer Folgen wird klar, wenn man sich $v[k]$ als eine Periode der periodischen Folge $\tilde{v}[k]$ vorstellt.

Weil $v[k]$ eine Folge ist, ist ihre Fouriertransformierte $\tilde{V}[\mu]$ periodisch und es ist $V[\mu] = \tilde{V}[\mu] \cdot R_M[\mu]$ mit dem Rechteckfenster

$$R_M[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22)$$

Die Periodizität von $\tilde{v}[k]$ ist ihrerseits eine Folge der Diskretisierung des Spektrums in Form der Folge $\tilde{V}[\mu]$ und es ist ebenso $v[k] = \tilde{v}[k] \cdot R_M[k]$.

Literatur

- [1] BRACEWELL, R. N.: *The Fourier Transform and Its Applications*. New York : McGraw-Hill, 1978
- [2] BRIGHAM, E. O. ; GOTTWALD, A. (Hrsg.): *FFT. Schnelle Fourier-Transformation*. München : Oldenbourg, 1982 (Einführung in die Nachrichtentechnik)
- [3] DAVIS, H. F.: *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Boston : Allyn and Bacon, 1963
- [4] DYM, H. ; MCKEAN, H. P.: *Fourier Series and Integrals*. New York : Academic, 1972
- [5] HARRIS, F. J.: On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. In: *Proc. IEEE* 66 (1978), January, Nr. 1, S. 51–83
- [6] KAMMEYER, K. D. ; KROSCHER, K.: *Digitale Signalverarbeitung. Filterung und Spektralanalyse mit Matlab®-Übungen*. 7. Aufl. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2009
- [7] OPPENHEIM, A. V. ; SCHAFER, R. W.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. 2. Aufl. München : Oldenbourg, 1995
- [8] OPPENHEIM, A. V. ; WILLSKY, A. S.: *Signale und Systeme*. 2. Aufl. Weinheim : VCH-Verlagsgesellschaft, 1992
- [9] PAPOULIS, A.: *The Fourier Integral and its Applications*. New York : McGraw-Hill, 1962
- [10] PROAKIS, J. G. ; MANOLAKIS, D. G.: *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*. 3. Upper Saddle River : Prentice Hall, 1996
- [11] RADER, C. M.: Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Samples is Prime. In: *Proc. IEEE* 56 (1968), S. 1107–1108
- [12] SCHÜSSLER, H. W.: *Netzwerke, Signale und Systeme*. Bd. 2: *Theorie kontinuierlicher und diskreter Signale und Systeme*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 1991
- [13] SCHÜSSLER, H. W.: *Digitale Signalverarbeitung*. Bd. 1: *Analyse diskreter Signale und Systeme*. 5. Aufl. Berlin : Springer, 2008
- [14] SCHÜSSLER, H. W.: *Digitale Signalverarbeitung*. Bd. 2: *Entwurf und Realisierung von digitalen Systemen*. Berlin : Springer, 2009
- [15] TRETTER, S. A.: *Discrete-Time Signal Processing*. New York : John Wiley, 1976
- [16] WELCH, P. D.: The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra. In: *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AUEA-15 (1970), June, S. 70–73