

Formelsammlung für die Hochfrequenztechnik

<http://www.siart.de/lehre/hf-formeln.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

4. November 2023 (Version 0.64)

Inhaltsverzeichnis

| | | | |
|---|----------|--------------------------------------|-----------|
| 1 Natur- und Feldkonstanten | 2 | 4.4 Rundhohlleiter | 8 |
| 2 Bauelemente | 2 | 4.5 Mikrostreifenleitungen | 8 |
| 3 Elektromagnetische Felder | 3 | 5 Antennen | 9 |
| 3.1 Grundgleichungen | 3 | 6 Passive Schaltungen | 10 |
| 3.2 Vektoranalysis | 3 | 6.1 Schwingkreise | 10 |
| 3.3 Ebene Wellen | 4 | 6.2 Koppelschaltungen | 10 |
| 3.4 Polarisierung | 5 | 6.3 Dämpfungsglieder | 11 |
| 3.5 Freiraumausbreitung | 5 | 6.4 Filter | 11 |
| 3.6 Streuung | 6 | 7 Mikrowellennetzwerke | 12 |
| 3.7 Reflexion an Grenzflächen | 6 | 8 Rauschen | 13 |
| 4 Wellenleiter | 6 | 9 Oszillatoren | 13 |
| 4.1 TEM-Leitungen | 6 | 10 Verstärker | 14 |
| 4.2 Koaxialleitungen | 7 | | |
| 4.3 Rechteckhohlleiter | 7 | | |

1 Natur- und Feldkonstanten

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c_0 = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Vakuum-Permeabilität:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$$

Vakuum-Permittivität:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \approx 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$$

Feldwellenwiderstand im Vakuum:

$$Z_{F0} = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$

Boltzmann-Konstante:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$$

Elementarladung:

$$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Elektronenmasse:

$$m_e = 9,1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

2 Bauelemente

Eindringtiefe (äquivalente Leitschichtdicke):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0 \mu_r}}$$

κ : Leitfähigkeit (in S/m)

Stromdichte in der Leitschicht:

$$J(z) = J_0 \cdot e^{-(z/\delta)} \cdot e^{-j(z/\delta)}$$

Flächenwiderstand:

$$R_* = \frac{1}{\kappa \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0 \mu_r}{\kappa}}$$

Spezifische Oberflächenimpedanz:

$$Z_* = (1 + j)R_*$$

Beziehung zwischen der Oberflächenstromdichte J_* und der tangentialen magnetischen Feldstärke H_{tan} an der Oberfläche:

$$J_* = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\text{tan}}$$

Gleichstromwiderstand:

$$R_0 = \frac{\ell}{A_0 \kappa}$$

ℓ : Länge (in m)

A_0 : Querschnittsfläche (in m²)

Hochfrequenzwiderstand:

$$\frac{R_{\sim}}{R_0} = \frac{1}{4} \frac{D}{\delta} \quad \text{und} \quad R_{\sim} \propto \sqrt{f}$$

Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{a \cdot b}{\Delta}$$

a, b : Kantenlängen (in m)

Δ : Plattenabstand (in m)

Näherungsweise Berücksichtigung der Randstreuung:

$$a \mapsto a + \frac{\Delta}{2} \quad b \mapsto b + \frac{\Delta}{2}$$

Komplexe Dielektrizitätszahl:

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = |\epsilon_r| e^{-j\delta_\epsilon} \approx \epsilon_r' (1 - j \tan \delta_\epsilon)$$

Admittanz eines verlustbehafteten Kondensators:

$$Y = j\omega C + G_p = j\omega C + \omega C \tan \delta_\epsilon$$

Umrechnung zwischen Parallel- und Serienverlustwiderstand bei *kleinen* Verlusten:

$$R_p R_s = X^2 \quad \text{mit} \quad X_L = \omega L \quad \text{bzw.} \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Güte von verlustbehafteten reaktiven Bauelementen:

$$Q_C = \frac{\omega C}{G_p} = \frac{1}{\omega C R_s} = \frac{1}{\tan \delta_C}$$

$$Q_L = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{1}{\omega L G_p} = \frac{1}{\tan \delta_L}$$

(Eigen-)induktivität einer Stromschleife:

$$L = \frac{\Phi^{(I)}}{I} = \frac{\iint \mathbf{B}^{(I)} \, dA}{I}$$

Induktivität eines Kreisringes:

$$L \approx \mu R \cdot \left(\ln \frac{R}{r} + 0,08 \right)$$

Induktivität einer Zylinderspule ohne Kern:

$$L \approx \mu_0 \frac{n^2 D^2 \pi}{4(\ell + 0,45 D)}$$

n : Windungszahl

D : Durchmesser (in m)

ℓ : Länge (in m)

Induktivität eines Ringkernes mit Luftspalt:

$$L = n^2 \frac{\mu_0 \mu_r A}{\ell_m} \cdot \frac{1}{1 + \mu_r \frac{\ell_L}{\ell_m}}$$

A : Querschnittsfläche (in m²)

ℓ_m : mittlere Feldlinienlänge (in m)

ℓ_L : Länge des Luftspalts (in m)

Gegeninduktivität zweier Stromschleifen K_1 und K_2 :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = M_{21}$$

Koppelfaktor:

$$k = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Gekoppelte Induktivitäten:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} L_1 & \pm M_{12} \\ \pm M_{12} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Reihenschaltung gekoppelter Induktivitäten:

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 \pm 2M_{12}$$

3 Elektromagnetische Felder

3.1 Grundgleichungen

Maxwellsche Gleichungen in Differenzialform:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Stromdichte und Raumladungsdichte:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{pol}} + \rho_f \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_{\text{pol}} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_{\text{pol}} &= -\text{div } \mathbf{P} \\ \mathbf{J}_{\text{mag}} &= \text{rot } \mathbf{M} \\ \mathbf{J}_{\text{pol}} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \end{aligned}$$

Elektrische Polarisation:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{dQ \ell}{dV} = \rho \ell$$

Magnetisierung:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

ℓ : Verschiebungsvektor
 \mathbf{p} : elektrisches Dipolmoment
 \mathbf{m} : magnetisches Dipolmoment

Materialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \end{aligned}$$

Maxwellsche Gleichungen mit Materialgrößen:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho_f(\mathbf{r}, t) \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

In dieser Form treten nur noch freie Ladungen ρ_f und freie Ströme \mathbf{J}_f auf.

Maxwellsche Gleichungen im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho_f(\mathbf{r}) \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}_f(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} \quad w_{\text{mag}} = \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}$$

Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter:

$$\mathbf{J} = \kappa (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

3.2 Vektoranalysis

Infinitesimales Element der Kurve $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned} ds &= \|\dot{\mathbf{r}}\| dt && \text{skalar} \\ d\mathbf{s} &= \dot{\mathbf{r}} dt && \text{vektoriell} \end{aligned}$$

Tangenteneinheitsvektor:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}$$

Infinitesimales Element der Fläche $\mathbf{r}(u, v)$:

$$\begin{aligned} dA &= \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv && \text{skalar} \\ d\mathbf{A} &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv && \text{vektoriell} \end{aligned}$$

Normaleneinheitsvektor:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

Infinitesimales Element des Volumens $\mathbf{r}(u, v, w)$:

$$dV = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w du dv dw = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Infinitesimales Element des Raumwinkels:

$$d\Omega = \frac{d\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} \quad \oint d\Omega = 4\pi$$

\mathbf{u}_r : radialer Einheitsvektor in Kugelkoordinaten

Infinitesimale Elemente in Zylinderkoordinaten:

| | |
|----------------|--|
| Kurvenelement | $ds = dr \mathbf{u}_r + (r d\varphi) \mathbf{u}_\varphi + dz \mathbf{u}_z$ |
| | $d\mathbf{A} = r d\varphi dz \mathbf{u}_r$ |
| Flächenelement | $d\mathbf{A} = dr dz \mathbf{u}_\varphi$ |
| | $d\mathbf{A} = r dr d\varphi \mathbf{u}_z$ |
| Volumenelement | $dV = r dr d\varphi dz$ |

Infinitesimale Elemente in Kugelkoordinaten:

| | |
|-----------------|---|
| Kurvenelement | $ds = dr \mathbf{u}_r + (r d\vartheta) \mathbf{u}_\vartheta + (r \sin \vartheta d\varphi) \mathbf{u}_\varphi$ |
| | $d\mathbf{A} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \mathbf{u}_r$ |
| Flächenelement | $d\mathbf{A} = r \sin \vartheta dr d\varphi \mathbf{u}_\vartheta$ |
| | $d\mathbf{A} = r dr d\vartheta \mathbf{u}_\varphi$ |
| Volumenelement | $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ |
| Raumwinkelement | $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ |

3.3 Ebene Wellen

Elektrisches und magnetisches Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_F} \mathbf{u} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Wellenzahl und Wellenvektor:

$$\mathbf{k} = k\mathbf{u} = (\beta - j\alpha)\mathbf{u}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Laufzeit:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta r}{v_p} = \Delta r \sqrt{\epsilon \mu}$$

Phasenverschiebung (elektrische Länge):

$$\Delta\varphi = -\beta \Delta r = -\omega \Delta\tau$$

Phasenkonstante:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

Komplexe Materialparameter:

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = |\epsilon_r| e^{-j\delta_\epsilon} \approx \epsilon_r' (1 - j \tan \delta_\epsilon)$$

$$\mu_r = \mu_r' - j\mu_r'' = |\mu_r| e^{-j\delta_\mu} \approx \mu_r' (1 - j \tan \delta_\mu)$$

Komplexe relative Permittivität bei zusätzlicher Leitfähigkeit:

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = \epsilon_r' - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$$

Debye-Beziehung für polare Substanzen:

$$\epsilon_r = \epsilon_{r\infty} + \frac{\epsilon_{r0} - \epsilon_{r\infty}}{1 + j\omega\tau}$$

$$= \epsilon_{r\infty} + \frac{\Delta\epsilon}{1 + (\omega\tau)^2} - j \cdot \frac{\Delta\epsilon \cdot \omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

mit $\Delta\epsilon = \epsilon_{r0} - \epsilon_{r\infty}$.

Relative Permittivität von Wasser [19]:

$$\epsilon_r(f, T) = \epsilon_{r\infty}(T) + \frac{\epsilon_{r0}(T) - \epsilon_{r\infty}(T)}{1 + j \frac{f}{\gamma(T) \text{ GHz}}}$$

mit

$$\vartheta(T) = 1 - \frac{300}{273,15 + T/^\circ\text{C}}$$

$$\epsilon_{r0}(T) = 77,66 - 103,3 \vartheta(T)$$

$$\epsilon_{r\infty}(T) = 0,066 \epsilon_{r0}(T)$$

$$\gamma(T) = 20,27 + 146,5 \vartheta(T) + 314 \vartheta^2(T)$$

Relative Permittivität von dünnen Plasmen:

$$\epsilon_r = 1 - \left(\frac{f_p}{f} \right)^2$$

mit der Plasmafrequenz

$$f_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e}}$$

e : Elementarladung

N : Ladungsträgerdichte

m_e : Elektronenmasse

Wellenzahl:

$$k = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} \cos \left(\frac{\delta_\epsilon + \delta_\mu}{2} \right)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} \sin \left(\frac{\delta_\epsilon + \delta_\mu}{2} \right).$$

Feldwellenwiderstand:

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Poynting-Vektor:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \}$$

Strahlungsleistungsdichte:

$$S_* = |\mathbf{S}| = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{Z_F} = \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 Z_F$$

3.4 Polarisisation

Elektrische Feldstärke (Ausbreitung in z-Richtung):

$$E(z) = E(0) \cdot e^{-jkz} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \cdot e^{-jkz} = \begin{pmatrix} |E_x| e^{j\delta_x} \\ |E_y| e^{j\delta_y} \end{pmatrix} \cdot e^{-jkz}$$

Orientierungswinkel:

$$\tan(2\psi) = \frac{2|E_x||E_y|}{|E_x|^2 - |E_y|^2} \cos(\delta_y - \delta_x)$$

Elliptizität:

$$\sin(2\chi) = \frac{2|E_x||E_y|}{|E_x|^2 + |E_y|^2} \sin(\delta_y - \delta_x)$$

Stokes-Vektor:

$$F = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ 2 \operatorname{Re}\{E_x E_y^*\} \\ -2 \operatorname{Im}\{E_x E_y^*\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ 2|E_x||E_y| \cos(\delta_y - \delta_x) \\ 2|E_x||E_y| \sin(\delta_y - \delta_x) \end{pmatrix}$$

$$= (|E_x|^2 + |E_y|^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\psi) \cos(2\chi) \\ \sin(2\psi) \cos(2\chi) \\ \sin(2\chi) \end{pmatrix}$$

Müller-Matrix:

$$F_E = \frac{1}{r^2} M F_S$$

F_E : Stokes-Vektor am Empfangsort

F_S : Stokes-Vektor am Sendeort

Komplexes Polarisationsverhältnis:

$$\rho = \frac{|E_y|}{|E_x|} \cdot e^{j(\delta_y - \delta_x)} = \frac{\cos(2\chi) \sin(2\psi) + j \sin(2\chi)}{1 + \cos(2\chi) \cos(2\psi)}$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{2 \operatorname{Re}\{\rho\}}{1 - |\rho|^2} \right\} + 180^\circ \quad \text{mod } \{180^\circ\}$$

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{2 \operatorname{Im}\{\rho\}}{1 + |\rho|^2} \right\}$$

Polarisationsvektor:

$$\varepsilon = \frac{E(0)}{|E|} = \frac{1}{\sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}} \begin{pmatrix} |E_x| e^{j\delta_x} \\ |E_y| e^{j\delta_y} \end{pmatrix}$$

Polarisationsbasis:

$$E(0) = E_A \cdot \varepsilon_A + E_B \cdot \varepsilon_B$$

Orthogonalität:

$$\varepsilon_1^H \cdot \varepsilon_2 = 0$$

oder

$$\psi_2 = \psi_1 + 90^\circ \quad \text{mod } \{180^\circ\} \quad \wedge \quad \chi_2 = -\chi_1$$

oder

$$\rho_2 = -\frac{1}{\rho_1^*}$$

Lineare Polarisationsbasis (Ausbreitung in z-Richtung):

$$\varepsilon_h = \mathbf{u}_x$$

$$\varepsilon_v = \mathbf{u}_y$$

Zirkulare Polarisationsbasis (Ausbreitung in z-Richtung):

$$\varepsilon_{lhc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_x + j\mathbf{u}_y)$$

$$\varepsilon_{rhc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_x - j\mathbf{u}_y)$$

Transformation zwischen linearer und zirkularer Basis:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{lhc}^T \\ \varepsilon_{rhc}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_h^T \\ \varepsilon_v^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_h^T \\ \varepsilon_v^T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{lhc}^T \\ \varepsilon_{rhc}^T \end{pmatrix}$$

Transformation zwischen linearen und zirkularen Feldamplituden:

$$\begin{pmatrix} E_h \\ E_v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{lhc} \\ E_{rhc} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{lhc} \\ E_{rhc} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_h \\ E_v \end{pmatrix}$$

Kohärenzmatrix:

$$J = \begin{pmatrix} \langle |E_A|^2 \rangle & \langle E_A E_B^* \rangle \\ \langle E_B E_A^* \rangle & \langle |E_B|^2 \rangle \end{pmatrix}$$

Polarisationsgrad:

$$p = \sqrt{1 - \frac{4 \det J}{(\operatorname{Spur} J)^2}} \quad ; \quad p \in [0, 1]$$

3.5 Freiraumausbreitung

Empfangsleistung bei einer Freiraumfunkstrecke:

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G_S}{4\pi r^2} A_W = \frac{G_S}{4\pi r^2} \cdot \frac{\lambda_0^2}{4\pi} G_E = \frac{\lambda_0^2}{(4\pi r)^2} G_S G_E$$

G_S : Gewinn der Sendeantenne

G_E : Gewinn der Empfangsantenne

A_W : Antennenwirkfläche (in m²)

Zahlenwertgleichung für die Funkfeldämpfung:

$$\frac{a_F}{\text{dB}} = -20 \lg \frac{\lambda_0}{4\pi r} = 92,4 + 20 \lg \frac{f}{\text{GHz}} + 20 \lg \frac{r}{\text{km}}$$

Funkhorizont:

$$d_{\text{Funk}} = \sqrt{2 \cdot k_e \cdot R \cdot h_A} = \sqrt{2 \cdot (4/3) \cdot R \cdot h_A}$$

Streckenbezogene Regendämpfung:

$$\frac{\alpha}{\text{dB/km}} = a \cdot \left(\frac{R}{\text{mm/h}} \right)^b$$

| Frequenz | a_H | a_V | b_H | b_V |
|----------|-----------|-----------|--------|--------|
| 2 GHz | 0,0000847 | 0,0000998 | 1,0664 | 0,9490 |
| 10 GHz | 0,01217 | 0,01129 | 1,2571 | 1,2156 |
| 15 GHz | 0,04481 | 0,05008 | 1,1233 | 1,0440 |
| 20 GHz | 0,09164 | 0,09611 | 1,0568 | 0,9847 |
| 25 GHz | 0,1571 | 0,1533 | 0,9991 | 0,9491 |
| 30 GHz | 0,2403 | 0,2291 | 0,9481 | 0,9129 |
| 35 GHz | 0,3374 | 0,3224 | 0,9047 | 0,8761 |
| 60 GHz | 0,8606 | 0,8515 | 0,7656 | 0,7486 |

Gangunterschied auf dem n -ten Fresnelellipsoid:

$$\Delta d = (2n - 1) \frac{\lambda_0}{4}$$

Empfangsfrequenz bei Relativbewegung:

$$\omega_E = \frac{d\phi}{dt} = \omega_S - \beta_0 \frac{dr(t)}{dt} = \omega_S + \omega_D$$

ω_S : Sendekreisfrequenz

ω_D : Dopplerkreisfrequenz

$r(t)$: Länge des Signalweges

Dopplerfrequenz bei monostatischem Radar:

$$f_D = f_S \cdot \frac{2 \cdot v_r}{c_0} = \frac{2}{\lambda_0} v_r$$

v_r : Relativgeschwindigkeit

Monostatische Radargleichung:

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G^2 \lambda_0^2}{(4\pi)^3 r^4} \cdot \sigma = \frac{A_W^2}{4\pi \lambda_0^2 r^4} \cdot \sigma$$

σ : Rückstreuquerschnitt

3.6 Streuung

Rückstreuquerschnitt einer leitenden Kugel:

$$\sigma = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j(-1)^n (2n+1)}{zh_n^{(2)}(z) (zh_n^{(2)}(z))'} \right|^2 ; \quad z = kr$$

$h_n^{(2)}$: sphärische Hankel-Funktion 2. Art

Näherungen für elektrisch kleine und große Kugeln:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx 9(2\pi r/\lambda_0)^4 \pi r^2 & 2\pi r/\lambda_0 &\ll 1 \\ \sigma &\approx \pi r^2 & 2\pi r/\lambda_0 &\gg 1 \end{aligned}$$

Rückstreuquerschnitt einer leitenden Platte:

$$\sigma = 4\pi \frac{A^2}{\lambda_0^2}$$

Rückstreuquerschnitt eines Tripelspiegels:

$$\sigma = \frac{4\pi \ell^4}{3\lambda_0^2}$$

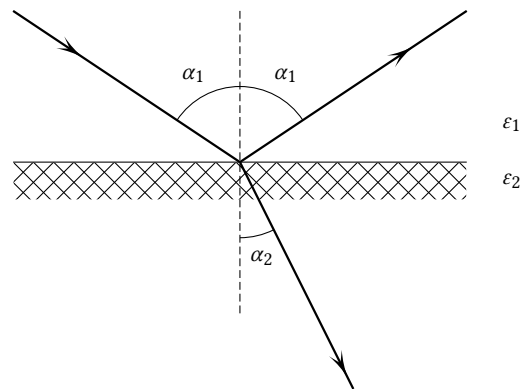
ℓ : Kantenlänge

Spiegelpunkt auf doppelt gekrümmter Oberfläche:

$$\sigma = \pi r_1 r_2$$

3.7 Reflexion an Grenzflächen

Reflexion an einer dielektrischen Grenzschicht:



Fresnelsche Reflexionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{E_r}{E_h} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}} \\ r_{\parallel} &= \frac{E_r}{E_h} = \frac{\epsilon_2 \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}}{\epsilon_2 \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}} \end{aligned}$$

Snelliussches Brechungsgesetz:

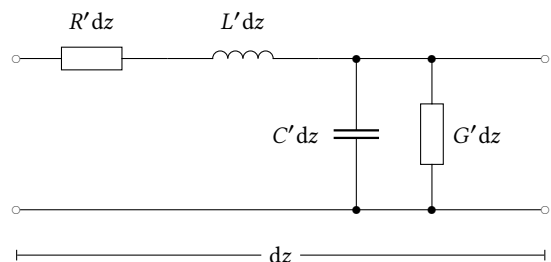
$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \alpha_2$$

Grenzwinkel der Totalreflexion:

$$\sin \alpha_{2g} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

4 Wellenleiter

4.1 TEM-Leitungen



Leitungswellenwiderstand:

$$Z_L = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

R' : Widerstandsbelag (in Ω/m)

L' : Induktivitätsbelag (in H/m)

G' : Leitwertbelag (in S/m)

C' : Kapazitätsbelag (in F/m)

Ausbreitungsmaß:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

α : Dämpfungskonstante (in Np/m)

β : Phasenkonstante (in rad/m)

Näherungen für kleine Verluste:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'}$$

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Spannung und Strom:

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_h e^{-\gamma z} - I_r e^{\gamma z}$$

mit $I_{h,r} = U_{h,r}/Z_L$

Wirkleistungsfluss wenn $U_r = 0$:

$$P(z) = \frac{|U(z)|^2}{2Z_L} = \frac{|U_h|^2}{2Z_L} e^{-2\alpha z} = P_0 e^{-2\alpha z}$$

Verlustleistungsbelag:

$$-\frac{dP}{dz} = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z}$$

P_0 : Leistung an der Stelle $z = 0$ (in W)

Verzerrungsfreiheit:

$$\frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}$$

Impedanztransformation:

$$Z_E = Z_L \frac{Z_A + Z_L \tanh(\gamma \ell)}{Z_L + Z_A \tanh(\gamma \ell)}$$

Eingangsimpedanz leerlaufende (offene) Leitung:

$$Z_{E,open} = Z_L \coth(\gamma \ell) \stackrel{\alpha=0}{=} -jZ_L \cot(\beta \ell)$$

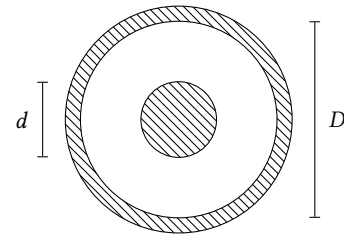
Eingangsimpedanz kurzgeschlossene Leitung:

$$Z_{E,short} = Z_L \tanh(\gamma \ell) \stackrel{\alpha=0}{=} jZ_L \tan(\beta \ell)$$

Messung des Leitungswellenwiderstandes:

$$Z_L = \sqrt{Z_{E,open} Z_{E,short}}$$

4.2 Koaxialleitungen



Leitungsbeläge:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r'}{\ln(D/d)}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

$$G' = \omega C' \cdot \tan \delta$$

$$R' = \frac{R_*}{\pi} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d}\right)$$

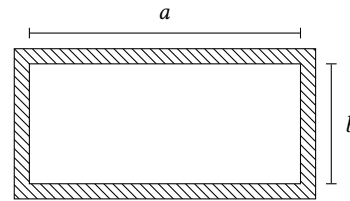
Leitungswellenwiderstand:

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d}$$

Elektrische Feldstärke:

$$E_r(z) = \frac{U(z)}{r \ln \frac{D}{d}}$$

4.3 Rechteckhohlleiter



Eigenwert (identisch für H_{mn} - und E_{mn} -Typen):

$$q_v = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}$$

Wellenzahl im Ausbreitungsmedium:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r$$

Ausbreitungsmaß des ν -ten Modes:

$$\gamma_\nu = \sqrt{q_\nu^2 - k^2}$$

Eckfrequenz des ν -ten Modes:

$$f_{c\nu} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} q_\nu$$

Cutoff-Wellenlänge des ν -ten Modes:

$$\lambda_{c\nu} = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{q_\nu} = \frac{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$\lambda_{c,10} = 2a\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$$

Feldwellenwiderstände:

$$Z_{FE} = \frac{Y_E}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} = Z_F \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{cv}}\right)^2}$$

$$Z_{FH} = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{Y_H} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{cv}}\right)^2}}$$

Wirkleistung der H_{10} -Welle:

$$P_W = \frac{ab}{4} \cdot \frac{|E_0|^2}{Z_{FH}} = \frac{ab}{4} \cdot \max\{|H_x|^2\} \cdot Z_{FH}$$

Hohlleiter-Wellenlänge:

$$\lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{cv}}\right)^2}}$$

Gruppengeschwindigkeit:

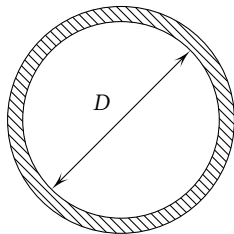
$$v_g = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{cv}}\right)^2}$$

Resonanzfrequenzen der H_{mnq} - und E_{mnq} -Moden in quaderförmigen Hohlraumresonatoren:

$$f_{mnq} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{c}\right)^2}}{2\sqrt{\epsilon\mu}}$$

a, b, c : Kantenlängen (in m)

4.4 Rundhohlleiter



Cutoff-Wellenlänge:

$$\lambda_{c,mn} = \frac{\pi D}{p_{mn}}$$

Wertetabelle für p_{mn} :

| m | H_{mn} -Typen | | | E_{mn} -Typen | | |
|-----|-----------------|----------|----------|-----------------|----------|----------|
| | p_{m1} | p_{m2} | p_{m3} | p_{m1} | p_{m2} | p_{m3} |
| 0 | 3,832 | 7,016 | 10,174 | 2,405 | 5,520 | 8,654 |
| 1 | 1,841 | 5,331 | 8,536 | 3,832 | 7,016 | 10,174 |
| 2 | 3,054 | 6,706 | 9,970 | 5,135 | 8,417 | 11,620 |

Phasenkonstante:

$$\beta_{mn} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{p_{mn}}{D/2}\right)^2}$$

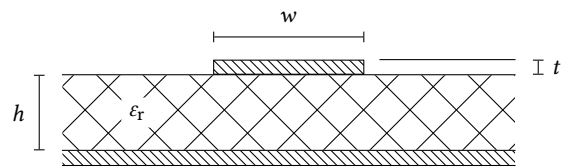
Resonanzfrequenzen der H_{mnq} - und E_{mnq} -Moden in kreiszylindrischen Hohlraumresonatoren:

$$f_{mnq} = \frac{\sqrt{\left(\frac{p_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{\ell}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}}$$

R : Radius (in m)

ℓ : Länge (in m)

4.5 Mikrostreifenleitungen



Effektive Breite (quasistatisch):

$$\frac{w_{\text{eff}}}{h} = \frac{w}{h} + \frac{5}{4\pi} \frac{t}{h} \left(1 + \ln \frac{4\pi w}{t}\right) \quad \frac{w}{h} < \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{w_{\text{eff}}}{h} = \frac{w}{h} + \frac{5}{4\pi} \frac{t}{h} \left(1 + \ln \frac{2h}{t}\right) \quad \frac{w}{h} \geq \frac{1}{2\pi}$$

Leitungswellenwiderstand (quasistatisch):

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \ln \left(\frac{8h}{w_{\text{eff}}} + \frac{w_{\text{eff}}}{4h} \right) \quad \frac{w}{h} \leq 1$$

$$Z_L = \frac{Z_{F0}/\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}}{\frac{w_{\text{eff}}}{h} + 1,393 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{w_{\text{eff}}}{h} + 1,444 \right)} \quad \frac{w}{h} > 1$$

Effektive relative Permittivität (quasistatisch):

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} F - C$$

mit

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}} + 0,04(1 - w/h)^2 \quad \frac{w}{h} \leq 1$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}} \quad \frac{w}{h} > 1$$

$$C = \frac{\epsilon_r - 1}{4,6} \frac{t/h}{\sqrt{w/h}}$$

Dispersion:

$$\epsilon_{r,\text{eff}}(f) = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_{r,\text{eff}}(0)}{1 + G \left(\frac{f}{f_p}\right)^2}$$

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}(f)}$$

mit

$$f_p = \frac{Z_{F0}}{2\mu_0 h} \quad G = \frac{\pi^2}{12} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_{r,\text{eff}}(0)} \sqrt{\frac{2\pi Z_L}{Z_{F0}}}$$

Dämpfung durch dielektrische Verluste:

$$\frac{\alpha_d}{\text{dB/m}} = 27,3 \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \left(\frac{\epsilon_{r,\text{eff}} - 1}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{\tan \delta}{\lambda_0}$$

Dämpfung durch Leiterverluste:

$$\frac{\alpha_L}{\text{dB/m}} = 1,38 \frac{R_*}{h Z_L} \frac{32 - (w_{\text{eff}}/h)^2}{32 + (w_{\text{eff}}/h)^2} \Lambda$$

$$\frac{\alpha_L}{\text{dB/m}} = 6,1 \cdot 10^{-5} \frac{R_* Z_L \epsilon_{r,\text{eff}}}{h} \left(\frac{w_{\text{eff}}}{h} + \frac{\frac{2}{3} \frac{w_{\text{eff}}}{h}}{\frac{w_{\text{eff}}}{h} + 1,444} \right) \Lambda$$

$\frac{w}{h} \leq 1$
 $\frac{w}{h} > 1$

mit

$$\Lambda = 1 + \frac{h}{w_{\text{eff}}} \left(1 + \frac{5t}{4\pi w} + \frac{5}{4\pi} \ln \frac{4\pi w}{t} \right) \quad \frac{w}{h} < \frac{1}{2\pi}$$

$$\Lambda = 1 + \frac{h}{w_{\text{eff}}} \left(1 - \frac{5t}{4\pi w} + \frac{5}{4\pi} \ln \frac{2h}{t} \right) \quad \frac{w}{h} \geq \frac{1}{2\pi}$$

5 Antennen

Strahlungsfeldarstellung als Wellenspektrum:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y$$

Darstellung mit Propagation in z-Richtung:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} E(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$E(k_x, k_y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$E(k_x, k_y, z) = f(k_x, k_y) e^{-jk_z z}$$

Klemmenimpedanz:

$$Z_A = 2 \frac{P_{\text{rad}} + P_V + 2j\omega(W_m - W_e)}{|I_0|^2}$$

P_{rad} : abgestrahlte Leistung

P_V : Verlustleistung

W_m : mittlere magnetische Energie im Nahfeld

W_e : mittlere elektrische Energie im Nahfeld

Strahlungswiderstand des Hertzschen Dipols:

$$R_{S,\text{HD}} = 80 \Omega \cdot \pi^2 \left(\frac{\Delta}{\lambda_0} \right)^2$$

Wirkfläche des Hertzschen Dipols:

$$A_{W,\text{HD}} = \frac{3\lambda_0^2}{8\pi}$$

Gewinn des Hertzschen Dipols:

$$G_{\text{HD}} = \frac{3}{2}$$

Abgestrahlte Leistung:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \iint \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} d\mathbf{A}$$

Effektive Länge einer Empfangsantenne:

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{U_0}{E_0}$$

U_0 : Klemmenleerlaufspannung

E_0 : einfallende elektrische Feldstärke

Verlustwiderstand eines $\lambda/2$ -Dipols:

$$R = \frac{\lambda_0}{8\pi r_0 \kappa \delta}$$

Effektive Länge einer geraden Monopolantenne:

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1 - \cos(2\pi\ell/\lambda)}{\sin(2\pi\ell/\lambda)}$$

Strahlungsintensität (Leistung pro Raumwinkel):

$$U(\vartheta, \varphi) = r^2 W_{\text{rad}}(\vartheta, \varphi)$$

W_{rad} : Strahlungsleistungsdichte im Fernfeld

Isotroper Kugelstrahler:

$$P_{*,i} = \frac{P_S}{4\pi r^2} \quad (\text{Strahlungsleistungsdichte})$$

$$A_{W,i} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \quad (\text{Wirkfläche})$$

$$U_0 = \frac{P_S}{4\pi} \quad (\text{Strahlungsintensität})$$

Direktivität:

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_0} = \frac{4\pi U(\vartheta, \varphi)}{P_{\text{rad}}}$$

Antennenwirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{\text{rad}}}{P_S}$$

Gewinn:

$$G(\vartheta, \varphi) = \eta D(\vartheta, \varphi)$$

Wirkfläche einer Antenne mit dem Gewinn G :

$$A_W = A_{W,i} \cdot G = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \cdot G$$

Gruppenfaktor von N gleichphasig gespeisten Strahlern:

$$F_G(\vartheta, \varphi) = \left| \sum_{n=1}^N e^{-j\beta_0 r_n \cdot \mathbf{u}} \right|$$

\mathbf{u} : Einheitsvektor in Richtung (ϑ, φ)
 r_n : Positionsvektor des n -ten Strahlers

Abschätzung der Halbwertsbreite:

$$\theta_{3\text{dB}} \approx 70^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{L}$$

Abschätzung der Halbwertsbreite (Zweiwegediagramm):

$$\theta_{3\text{dB}} \approx 50^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{L}$$

Abschätzung des Gewinns aus den Halbwertsbreiten:

$$G \approx \frac{4\pi}{\theta_{3\text{dB}}/\text{rad} \cdot \phi_{3\text{dB}}/\text{rad}} \approx \frac{41000}{\theta_{3\text{dB}}/^\circ \cdot \phi_{3\text{dB}}/^\circ}$$

Abschätzung der Fernfeldgrenze:

$$R \approx 2 \frac{L^2}{\lambda_0}$$

L : größte Ausdehnung der Antennenapertur

6 Passive Schaltungen

6.1 Schwingkreise

Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonanzblindwiderstand und -blindleitwert:

$$X_R = \omega_R L = \frac{1}{\omega_R C} \quad B_R = \omega_R C = \frac{1}{\omega_R L}$$

Güte:

$$Q = \frac{X_R}{R} = \frac{B_R}{G}$$

Relative Verstimmung:

$$v = \frac{\omega}{\omega_R} - \frac{\omega_R}{\omega}$$

Bandbreite:

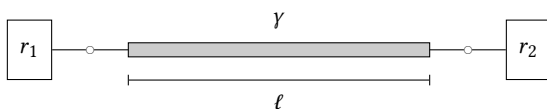
$$B = \frac{f_R}{Q}$$

Impedanz und Admittanz:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R(1 + jQv)$$

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G(1 + jQv)$$

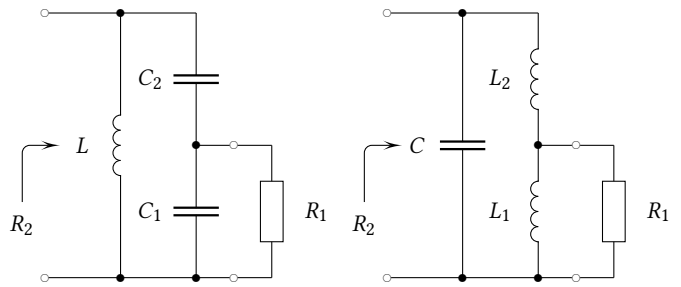
Resonanzbedingung bei Leitungsresonatoren:



$$r_1 r_2 e^{-2\gamma l} = 1$$

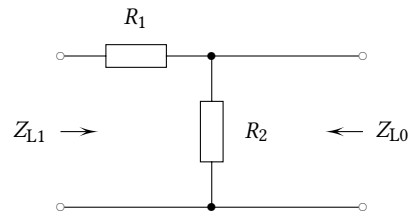
6.2 Koppelschaltungen

Resonanztransformation:



$$R_2 = \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2} \right)^2 R_1 \quad R_2 = \left(\frac{L_1 + L_2}{L_1} \right)^2 R_1$$

Wellenwiderstandstransformation mit Widerständen und minimaler Dämpfung ($Z_{L1} > Z_{L0}$):

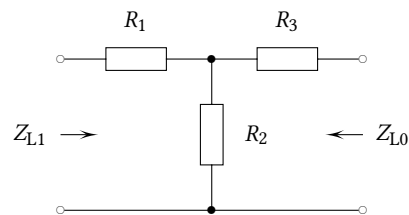


$$\frac{a_{\min}}{\text{dB}} = 10 \lg \left\{ \frac{2 \left(Z_{L1} + \sqrt{Z_{L1}^2 - Z_{L1} Z_{L0}} \right) - Z_{L0}}{Z_{L0}} \right\}$$

$$R_1 = \sqrt{Z_{L1}^2 - Z_{L1} Z_{L0}}$$

$$R_2 = Z_{L0} \sqrt{Z_{L1} / (Z_{L1} - Z_{L0})}$$

Wellenwiderstandstransformation mit Widerständen und spezifizierter Dämpfung ($Z_{L1} > Z_{L0}$):



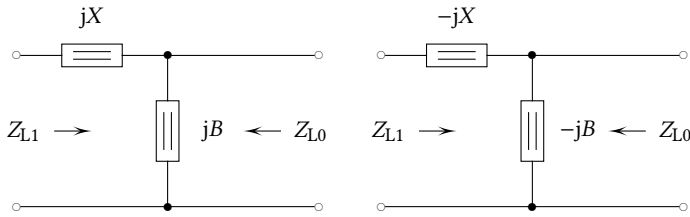
$$A = 10^{a/10 \text{ dB}}$$

$$R_2 = \frac{2\sqrt{AZ_{L1}Z_{L0}}}{A-1}$$

$$R_1 = Z_{L1} \left(\frac{A+1}{A-1} \right) - R_2$$

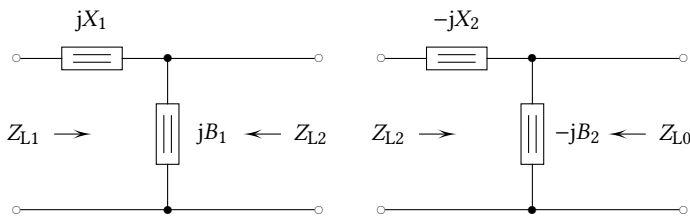
$$R_3 = Z_{L0} \left(\frac{A+1}{A-1} \right) - R_2$$

Wellenwiderstandstransformation mit zwei Blindelementen ($Z_{L1} < Z_{L0}$):



$$W = \frac{Z_{L0}}{Z_{L1}} \quad X = Z_{L1} \sqrt{W - 1} \quad B = \frac{\sqrt{W - 1}}{W Z_{L1}}$$

Breitbandige Wellenwiderstandstransformation in 2 Stufen ($Z_{L1} < Z_{L0}$):



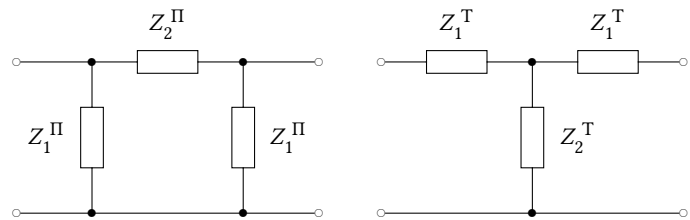
Geometrische Stufung:

$$W = \frac{Z_{L0}}{Z_{L2}} = \frac{Z_{L2}}{Z_{L1}} \quad Z_{L2} \sqrt{Z_{L0} Z_{L1}}$$

$$X_1 = Z_{L1} \sqrt{W - 1} \quad B_1 = \frac{\sqrt{W - 1}}{W Z_{L1}}$$

$$X_2 = Z_{L2} \sqrt{W - 1} \quad B_2 = \frac{\sqrt{W - 1}}{W Z_{L2}}$$

6.3 Dämpfungsglieder



Angepasstes Pi-Dämpfungsglied:

$$Z_1^{\Pi} = \frac{Z_0}{\tanh \frac{a}{2}} \quad Z_2^{\Pi} = Z_0 \cdot \sinh a$$

Angepasstes T-Dämpfungsglied:

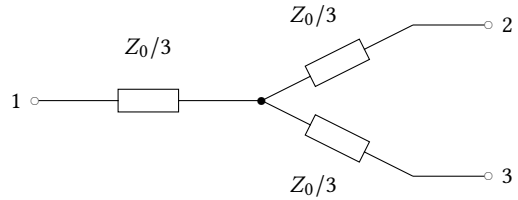
$$Z_1^{\text{T}} = Z_0 \cdot \tanh \frac{a}{2} \quad Z_2^{\text{T}} = \frac{Z_0}{\sinh a}$$

mit $a = \ln|U_1/U_2|$.

Ausgewählte Werte für $Z_0 = 50 \Omega$:

| | 3 dB | 6 dB | 10 dB | 15 dB | 20 dB | 30 dB |
|------------------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| Z_1^{Π} | 292,4 Ω | 150,5 Ω | 96,2 Ω | 71,6 Ω | 61,1 Ω | 53,3 Ω |
| Z_2^{Π} | 17,6 Ω | 37,4 Ω | 71,2 Ω | 136,1 Ω | 247,5 Ω | 789,8 Ω |
| Z_1^{T} | 8,5 Ω | 16,6 Ω | 26,0 Ω | 34,9 Ω | 40,9 Ω | 46,9 Ω |
| Z_2^{T} | 141,9 Ω | 66,9 Ω | 35,1 Ω | 18,4 Ω | 10,1 Ω | 3,2 Ω |

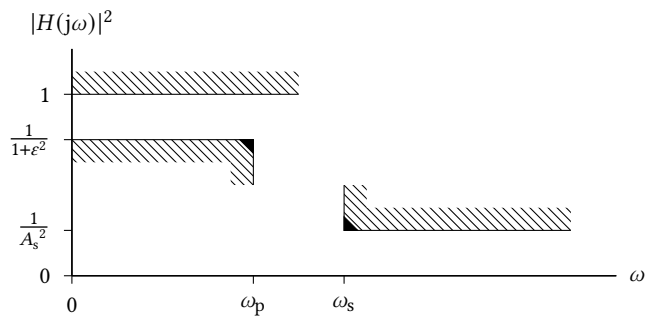
Resistiver angepasster 6-dB-Leistungsteiler:



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4 Filter

Toleranzschema für Tiefpässe:



ω_p : Ende des Passbandes

ω_s : Beginn des Sperrbandes

A_s^2 : minimale Sperrdämpfung

Butterworth-Tiefpass:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Omega^{2n}} \quad ; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

3-dB-Grenzfrequenz:

$$\omega_{3 \text{ dB}} = \omega_p / \epsilon$$

Butterworth-Filterordnung:

$$n \approx \frac{\ln(A_s/\epsilon)}{\ln(\omega_s/\omega_p)}$$

Tschebyscheff-Tiefpass:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)}$$

T_n : Tschebyscheff-Polynom n -ter Ordnung

Tschebyscheff-Filterordnung:

$$n \approx \frac{\operatorname{arccosh}(A_s/\varepsilon)}{\operatorname{arccosh}(\omega_s/\omega_p)}$$

Tiefpass-Hochpass-Transformation:

$$\Omega \rightarrow -\frac{1}{\Omega}$$

Tiefpass-Bandpass-Transformation:

$$\Omega \rightarrow \kappa \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}} \quad \kappa = \frac{\omega_0}{\omega_{p2} - \omega_{p1}}$$

ω_0 : Mittenfrequenz

κ : relative Bandbreite

Tiefpass-Bandsperre-Transformation:

$$\Omega \rightarrow \frac{1}{\kappa \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

7 Mikrowellennetzwerke

Wellengrößen:

$$a = \frac{U + IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_h}{\sqrt{Z_0}} = I_h\sqrt{Z_0}$$

$$b = \frac{U - IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_r}{\sqrt{Z_0}} = I_r\sqrt{Z_0}$$

Normierte Impedanz und Admittanz:

$$z = Z/Z_0 \quad y = YZ_0$$

Reflexionsfaktor:

$$r = \frac{z - 1}{z + 1} \quad z = \frac{1 + r}{1 - r}$$

Stehwellenverhältnis (VSWR):

$$s = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$

Betrag der Reflexion:

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

$\lambda/4$ -Transformator:

$$Z_L = \sqrt{Z_1 Z_2}$$

Binomial gestufter Impedanztransformator:

$$\ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = 2^{-N} \binom{N}{n} \ln \frac{Z_A}{Z_E}$$

N : Anzahl der $\lambda/4$ -Stufen

Reflexionsfaktortransformation durch eine Leitung:

$$r_E = r_A e^{-2\gamma \ell}$$

Streumatrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Wellenkettentransformation:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Umrechnung zwischen Streu- und Kettenform:

$$C = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} -\det S & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{c_{22}} \begin{pmatrix} c_{12} & \det C \\ 1 & -c_{21} \end{pmatrix}$$

Umrechnung zwischen Streu- und Widerstandsform:

$$z = (E - S)^{-1}(E + S) = (E + S)(E - S)^{-1}$$

$$y = (E + S)^{-1}(E - S) = (E - S)(E + S)^{-1}$$

$$S = (z + E)^{-1}(z - E) = (z - E)(z + E)^{-1}$$

$$-S = (y + E)^{-1}(y - E) = (y - E)(y + E)^{-1}$$

E : Einheitsmatrix

S : Streumatrix (auf Z_0 bezogen)

z : normierte Impedanzmatrix ($z = Z/Z_0$)

y : normierte Admittanzmatrix ($y = YZ_0$)

Reflexionsfaktortransformation durch ein Zweitor:

$$r_E = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21} \cdot r_A}{1 - s_{22} \cdot r_A} = \frac{s_{11} - \det S \cdot r_A}{1 - s_{22} \cdot r_A}$$

Verlustfreiheit:

$$S^H S = E$$

Eigenreflexionsfreiheit:

$$s_{ii} = 0 \quad \forall \quad i$$

Reflexionssymmetrie:

$$s_{ii} = s_{jj} \quad \forall \quad i, j$$

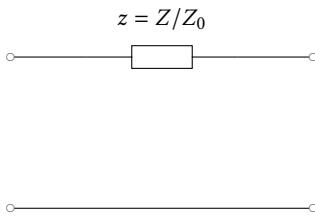
Transmissionssymmetrie (Reziprozität):

$$s_{ij} = s_{ji} \quad \forall \quad i \neq j \quad \text{oder} \quad S^T = S$$

Ein Mehrtor heißt (voll)symmetrisch, wenn es reflexionssymmetrisch ist und wenn obendrein alle s_{ij} mit $i \neq j$ den gleichen Wert haben.

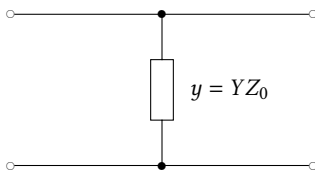
Ein vollsymmetrisches Dreitor kann nicht gleichzeitig eigenreflexionsfrei und verlustfrei sein.

Streuparameter einer Serienimpedanz:



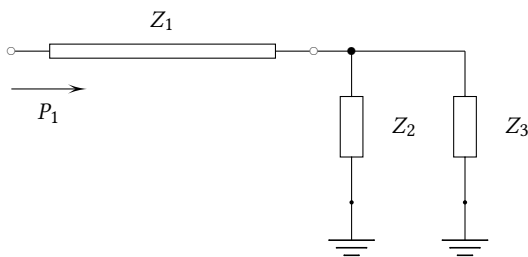
$$s_{11} = s_{22} = \frac{z}{2+z} \quad s_{12} = s_{21} = \frac{2}{2+z}$$

Streuparameter einer Paralleladmittanz:



$$s_{11} = s_{22} = -\frac{y}{2+y} \quad s_{12} = s_{21} = \frac{2}{2+y}$$

Leistungsteilung an einer angepassten Parallelverzweigung ($Y_2 + Y_3 = Y_1$):



Teilung gemäß $P_2 = \alpha P_1$ und $P_3 = (1 - \alpha)P_1$:

$$Z_2 = Z_1/\alpha \quad Z_3 = Z_1/(1 - \alpha)$$

8 Rauschen

Zusammenhang zwischen SNR und E_b/N_0 :

$$\frac{S}{N} = \frac{E_b/T_b}{N_0 B} = \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{1}{T_b B}$$

- S: Signalleistung
- N: Rauschleistung
- E_b : Signalenergie pro Bit
- N_0 : spektrale Rauschleistungsdichte
- B: Bandbreite
- T_b : Zeitdauer eines Bits

Der Kehrwert $1/(T_b B)$ des Zeit-Bandbreite-Produkts $T_b B$ wird auch *spektrale Effizienz* genannt.

Verfügbare Rauschleistung eines thermisch rauschenden ohmschen Widerstands:

$$P_V = \frac{|\tilde{U}_R|^2}{4R} = kT \cdot \Delta f$$

Verfügbare Rauschleistung bei Raumtemperatur:

$$\frac{P_V}{\text{dBm}} = -174 + 10 \lg \frac{\Delta f}{\text{Hz}} \quad \text{bei } T_0 = 300 \text{ K}$$

Boltzmann-Konstante:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$$

Serienschaltung von Rauschspannungsquellen:

$$\tilde{U}_R = \sqrt{\tilde{U}_{R1}^2 + \tilde{U}_{R2}^2} \quad (\text{unkorreliert})$$

$$\tilde{U}_R = \tilde{U}_{R1} + \tilde{U}_{R2} \quad (\text{voll korreliert})$$

Definition der Rauschzahl:

$$F = F_Z + 1 = \frac{S_1/N_1}{S_2/N_2}$$

Verfügbare Rauschleistung am Ausgang eines rauschenden Zweitorts:

$$N_2 = k \Delta f G T_1 + k \Delta f G T_1 F_Z(T_1)$$

Umrechnung der Zusatzrauschzahl auf eine andere Generator-temperatur:

$$F_Z(T_1) = \frac{T_0}{T_1} \cdot F_Z(T_0)$$

Kettenrauschzahl:

$$F_{Z, \text{ges}} = F_{Z1} + \frac{F_{Z2}}{v_{p1}} + \frac{F_{Z3}}{v_{p1}v_{p2}} + \dots + \frac{F_{ZN}}{v_{p1}v_{p2} \dots v_{pN-1}}$$

Systemrauschtemperatur:

$$T_S = T_A + F_Z T_0$$

Empfänger-Grenzfeldstärke:

$$\tilde{E}_g = \frac{1}{h_{\text{eff}}} \sqrt{4k T_S R_i \cdot \Delta f}$$

Antennenrauschtemperatur:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \iint G(\Omega) T_H(\Omega) d\Omega$$

9 Oszillatoren

Anschwingbedingung bei Entdämpfung eines Parallelresonanzkreises:

$$G_n = G_L \quad \wedge \quad \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

Anschwingbedingung bei Rückkopplung eines Verstärkers:

$$|k| \cdot |v| = 1 \quad \wedge \quad \varphi_v + \varphi_k = 2n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

10 Verstärker

Klemmenleistungsgewinn:

$$G = \frac{\text{Leistung an die Last}}{\text{Leistung vom Generator}} \\ = \frac{|s_{21}(1 - |r_L|^2)|^2}{1 - |s_{11}|^2 + |r_L|^2(|s_{11}|^2 - |\det S|^2) - 2 \operatorname{Re}\{r_L(s_{22} - s_{11}^* \det S)\}}$$

Übertragungsgewinn (Betriebsleistungsgewinn):

$$G_T = \frac{\text{Leistung an die Last}}{\text{vom Generator verfügbare Leistung}} \\ = \frac{1 - |r_G|^2}{|1 - r_G s_{11}|^2} |s_{21}|^2 \frac{1 - |r_L|^2}{|1 - r_L r_2^2|}$$

Verfügbarer Leistungsgewinn:

$$G_{\max} = \frac{\text{vom Verstärker verfügbare Leistung}}{\text{vom Generator verfügbare Leistung}} \\ = |s_{21}|^2 \frac{1 - |r_L|^2}{(1 - |r_G|^2)|1 - r_L s_{22}|}$$

Einfügungsgewinn:

$$G = \frac{\text{Leistung an die Last}}{\text{Leistung vom Generator an die Last}}$$

Stabilitätsfaktor:

$$K = \frac{1 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 + |\det S|^2}{2|s_{12}||s_{21}|}$$

Stabilitätsbedingung für einzelnen Transistor:

$$K > 1 \quad \wedge \quad |\det S| < 1$$

Stabilitätskreis Lastreflexionsfaktor:

$$M_L = \frac{s_{22}^* - s_{11}(\det S)^*}{|s_{22}|^2 - |\det S|^2} \quad \text{Mittelpunkt} \\ R_L = \left| \frac{s_{21}s_{12}}{|s_{22}|^2 - |\det S|^2} \right| \quad \text{Radius}$$

Stabilitätskreis Generatorreflexionsfaktor:

$$M_G = \frac{s_{11}^* - s_{22}(\det S)^*}{|s_{11}|^2 - |\det S|^2} \quad \text{Mittelpunkt} \\ R_G = \left| \frac{s_{21}s_{12}}{|s_{11}|^2 - |\det S|^2} \right| \quad \text{Radius}$$

Quellen und weiterführende Literatur

- [1] I. J. Bahl and P. Bhartia: *Microstrip Antennas*. Dedham, MA: Artech House, 1980.
- [2] C. A. Balanis: *Advanced Engineering Electromagnetics*. Chichester: John Wiley & Sons, 1989.
- [3] C. A. Balanis: *Antenna Theory. Analysis and Design*. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [4] H. Brand: *Schaltungslehre linearer Mikrowellenetze*. Stuttgart: Hirzel-Verlag, 1970.
- [5] R. E. Collin: *Antennas and Radiowave Propagation*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- [6] R. E. Collin: *Foundations for Microwave Engineering*. 2nd ed. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Hoboken, New Jersey: Wiley & Sons, 2001.
- [7] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.
- [8] E. O. Hammerstad: "Equations for Microstrip Circuit Design". In: *Proc. 5th European Microwave Conference*. Hamburg, Germany, September 1975, pp. 268–272.
- [9] E. O. Hammerstad and O. Jensen: "Accurate Models for Microstrip Computer-Aided Design". In: *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*. Washington, DC, USA, May 28–30, 1980, pp. 407–409.
- [10] D. A. Hill: *Electromagnetic Fields in Cavities. Deterministic and Statistical Theories*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [11] A. Ishimaru: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [12] *Specific attenuation model for rain for use in prediction methods*. Recommendation ITU-R P.838-3. International Telecommunication Union (ITU). Geneva, Switzerland, March 2005. URL: <https://www.itu.int/rec/R-REC-P.838/en> (visited on 03/25/2020).
- [13] K. W. Kark: *Antennen und Strahlungsfelder*. 4. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011.
- [14] M. Kobayashi: "A Dispersion Formula Satisfying Recent Requirements in Microstrip CAD". In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* MTT-36.8 (August 1988), pp. 1246–1250.
- [15] M. K. Krage and G. I. Haddad: "Frequency-Dependent Characteristics of Microstrip Transmission Lines". In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* MTT-20.10 (October 1972), pp. 678–688.
- [16] J. D. Kraus: *Antennas*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [17] R. Kröger und R. Unbehauen: *Elektrodynamik*. 3. Aufl. Stuttgart: Teubner, 1993.
- [18] T. H. Lee: *Planar Microwave Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [19] H. J. Liebe, G. A. Hufford, and T. Manabe: "A model for the complex permittivity of water at frequencies below 1 THz". In: *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* 12.7 (1991), pp. 659–675.
- [20] H. Meinke und F. W. Gundlach: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*. Hrsg. von K. Lange und K.-H. Löcherer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1992.
- [21] K. Meyberg und P. Vachenaer: *Höhere Mathematik 1*. Berlin: Springer, 1990.
- [22] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, August 1, 2016. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/> (visited on 08/02/2016).
- [23] H. W. Schüßler: *Systemtheorie linearer elektrischer Netzwerke*. 2. Aufl. Bd. 1. Netzwerke, Signale und Systeme. Berlin: Springer, 1990.
- [24] U. Tietze und Ch. Schenk: *Halbleiter-Schaltungstechnik*. 12. Aufl. Berlin: Springer, 2002.
- [25] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 1*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 6. Aufl. Berlin: Springer, 2000.
- [26] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 2*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1999.