Wirkleistung, Blindleistung und Effektivwert*

http://www.siart.de/lehre/leistung.pdf

Uwe Siart

tutorien@siart.de

28. Januar 2012 (Version 1.82)

Inhaltsverzeichnis

1. Leistung

Wir betrachten einen allgemeinen linearen Zweipol von beliebigem inneren Aufbau. An seinen Klemmen liege die zeitharmonische Spannung $u(t)$ und es fließe der Strom $i(t)$ von der Form

$$u(t) = |U| \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Re}\left\{|U|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \tag{1a}$$

$$i(t) = |I| \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Re}\left\{|I|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}. \tag{1b}$$

Dabei wird ein Verbraucherzählpfeilsystem angenommen (Abb. 1). Die momentane Leis-

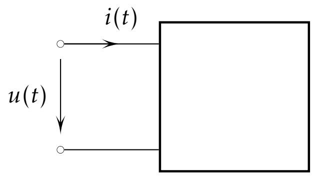

Abb. 1: Strom und Spannung an den Klemmen eines Zweipols

*Dieser Aufsatz ist ein Auszug aus: Detlefsen, J.; Siart, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik.* 3. Auflage. München : Oldenbourg, 2009.

tung $p(t)$ ist dann

$$\begin{aligned} p(t) = u(t) \cdot i(t) = |U| \cdot |I| \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \\ = \frac{1}{2}|U||I| \cdot \Big(\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

Entsprechend den Zählrichtungen von $u(t)$ und $i(t)$ nimmt der Zweipol Leistung auf, wenn $p(t) > 0$ und er gibt Leistung ab, wenn $p(t) < 0$. Wir schreiben nun den Term $\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$ in der Form

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) = \cos\Big(2(\omega t + \varphi_u) - (\varphi_u - \varphi_i)\Big) \\ = \cos 2(\omega t + \varphi_u)\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \sin 2(\omega t + \varphi_u)\sin(\varphi_u - \varphi_i) \end{aligned} \tag{3}$$

um und können damit $p(t)$ schreiben als

$$p(t) = \frac{1}{2}|U||I| \cdot \Bigg(\Big(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)\Big)\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \sin 2(\omega t + \varphi_u)\sin(\varphi_u - \varphi_i)\Bigg). \tag{4}$$

Offenbar besitzt der Term $1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)$ den Mittelwert 1 und der Term $\sin 2(\omega t + \varphi_u)$ den Mittelwert 0. Man bezeichnet die Leistung, die im zeitlichen Mittel vom Zweipol aufgenommen wird, als *Wirkleistung* P_W. Dem gegenüber steht ein Anteil, der im zeitlichen Mittel 0 ist, also eine Leistung, die vom Zweipol aufgenommen und zu anderen Zeiten wieder abgegeben wird. Diesen Anteil bezeichnet man als *Blindleistung* P_B und man schreibt

$$P_\mathrm{W} = \overline{p(t)} = \frac{1}{2}|U||I| \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = u_\mathrm{eff} \cdot i_\mathrm{eff} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) \tag{5a}$$

$$P_\mathrm{B} = \frac{1}{2}|U||I| \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i) = u_\mathrm{eff} \cdot i_\mathrm{eff} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i)\,. \tag{5b}$$

Mit der Zerlegung (5a,b) in Wirk- und Blindleistung kann die Momentanleistung (4) auch geschrieben werden als

$$p(t) = P_\mathrm{W} \cdot \Big(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)\Big) + P_\mathrm{B} \cdot \sin 2(\omega t + \varphi_u)\,. \tag{6}$$

In dieser Form erkennt man die Bedeutung der Wirkleistung P_W als den zeitlichen Mittelwert der Momentanleistung sowie der Blindleistung P_B als der Amplitude des mittelwertfreien und zeitlich schwankenden Anteils der Momentanleistung $p(t)$. In Abb. 2 sind beispielhaft die Funktionen $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$ sowie der zeitliche Mittelwert von $p(t)$ für $\varphi_u - \varphi_i = 60°$ dargestellt.

Ein weiterer Weg zur Definition (5) von Wirk- und Blindleistung ist der Folgende. Offenbar ist $p(t)$ zu allen Zeiten positiv, wenn $u(t)$ und $i(t)$ in Phase sind, also wenn $\varphi_i = \varphi_u$. In diesem Fall wird nur Wirkleistung aufgenommen. Andererseits ist $p(t)$ mittelwertfrei, wenn zwischen $u(t)$ und $i(t)$ eine Phasendifferenz von $\pi/2$ besteht. Der Zweipol nimmt dann keine Wirkleistung auf, es liegt ausschließlich Blindleistung vor. Man erkennt beides anhand der Beziehungen

$$\cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi_u) \qquad \geq 0 \quad \forall t \tag{7a}$$

$$\cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_u \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\frac{1}{2}\sin(2\omega t + 2\varphi_u) \qquad \text{mittelwertfrei}\,. \tag{7b}$$

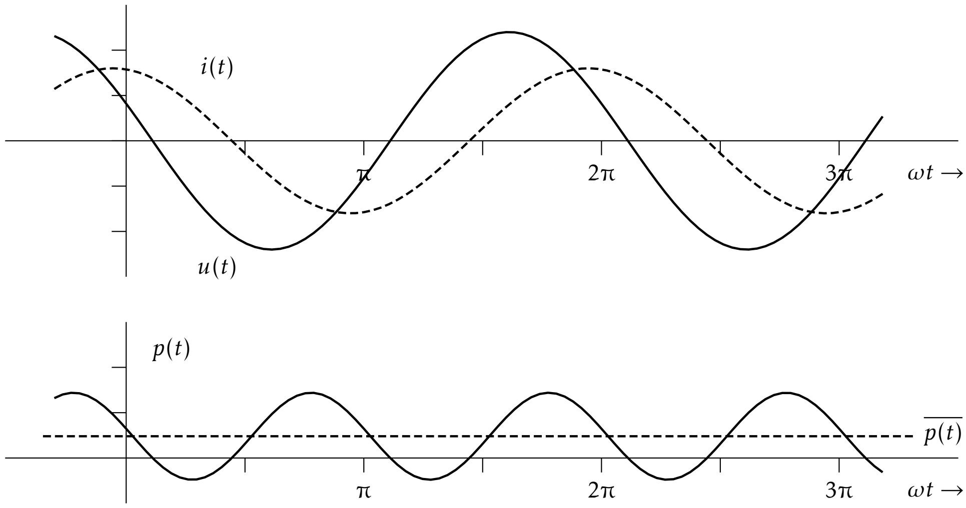

Abb. 2: Die harmonischen Zeitfunktionen $u(t)$ und $i(t)$ mit $\varphi_u - \varphi_i = 60°$ und der entstehende Verlauf der Momentanleistung $p(t)$

Aufgrund dieser Erkenntnis zerlegen wir den Strom (1b) in einen Anteil, der mit $u(t)$ in Phase ist und in einen Anteil, der $u(t)$ um $\pi/2$ nacheilt. Wir erhalten

$$i(t) = |I| \cdot \left(\cos(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_u) + \sin(\varphi_u - \varphi_i)\cos(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}) \right) \tag{8}$$

und hieraus durch Produktbildung mit (1a) aus dem gleichphasigen Stromanteil und dem der Spannung um $\pi/2$ nacheilenden Stromanteil die Werte (5a,b) für Wirk- und Blindleistung. Unter Verwendung der komplexen Schreibweise können wir die *komplexe Scheinleistung*

$$S = P_\mathrm{W} + \mathrm{j}P_\mathrm{B} = \frac{1}{2}|U||I|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{2} \cdot U \cdot I^* \tag{9}$$

definieren, sodass $P_\mathrm{W} = \mathrm{Re}\{S\}$ und $P_\mathrm{B} = \mathrm{Im}\{S\}$ ist.

Jeder lineare Zweipol kann an seinen Klemmen durch seine Impedanz Z beziehungsweise durch seine Admittanz $Y = 1/Z$ beschrieben werden. Verwendet man die Zusam-

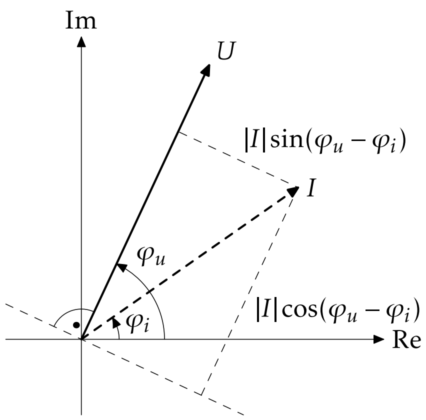

Abb. 3: Zerlegung des Stromes in einen Wirk- und einen Blindanteil

menhänge $U = ZI$ und $I^* = Y^*U^*$, so ergeben sich aus (9) die Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\,U\,I^* &&= \frac{1}{2}\,|I|^2\,Z &&= \frac{1}{2}\,|U|^2\,Y^* \\ P_\mathrm{W} &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\,U\,I^*\right\} &&= \frac{1}{2}\,|I|^2\,\mathrm{Re}\{Z\} &&= \frac{1}{2}\,|U|^2\,\mathrm{Re}\{Y\} \\ P_\mathrm{B} &= \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\,U\,I^*\right\} &&= \frac{1}{2}\,|I|^2\,\mathrm{Im}\{Z\} &&= -\frac{1}{2}\,|U|^2\,\mathrm{Im}\{Y\} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(10\mathrm{a})\\(10\mathrm{b})\\(10\mathrm{c})\end{aligned}$$

für Wirk- und Blindleistung. Die Definition (9) beinhaltet die Konvention, dass induktive Blindleistung positiv und kapazitive Blindleistung negativ gezählt wird. Der Betrag der Scheinleistung errechnet sich mit

$$|S| = \sqrt{{P_\mathrm{W}}^2 + {P_\mathrm{B}}^2} = \frac{|U|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|I|}{\sqrt{2}} = u_\mathrm{eff} \cdot i_\mathrm{eff} \tag{11}$$

als das Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom. An dieser Stelle sei betont, dass die Beträge von komplexen Zeigern in der Hochfrequenztechnik stets *Scheitelwerte* sind, während im Bereich der Energietechnik hier üblicherweise mit Effektivwerten gerechnet wird.

2. Effektivwert

Der Effektivwert u_eff einer Spannung $u(t)$ ist diejenige Gleichspannung, die an einem ohmschen Widerstand R im zeitlichen Mittel die gleiche Wirkleistung P_W umsetzt wie die Spannung $u(t)$. Der Effektivwert eines Stromes ist in gleicher Weise festgelegt. Zur Herleitung betrachten wir die Wirkleistung

$$P_\mathrm{W} = \overline{p(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} p(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

als den zeitlichen Mittelwert $\overline{p(t)}$ der Leistung $p(t)$. Die Momentanleistung an einem Wirkwiderstand R mit der Spannung $u(t)$ ist

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R}. \tag{13}$$

Die in Wärme umgesetzte mittlere Leistung ist dann

$$P_\mathrm{W} = \overline{p(t)} = \frac{\overline{u^2(t)}}{R} = \frac{u_\mathrm{eff}^2}{R}, \tag{14}$$

wodurch sich der Effektivwert von $u(t)$ ergibt als

$$\boxed{u_\mathrm{eff} = \sqrt{\overline{u^2(t)}}.} \tag{15}$$

Im Fall einer periodischen Funktion $u(t)$ ist die Mittelung über den Zeitraum T einer Periode ausreichend. Sie liefert den selben Mittelwert, wie eine Mittelung über alle Zeiten. Wir betrachten den Sonderfall einer harmonischen Zeitabhängigkeit mit beliebiger Nullphase φ_u entsprechend (1a) und erhalten dann für den Effektivwert

$$u_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \Big(|U| \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)\Big)^2 \,\mathrm{d}t} = |U| \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} \cos^2(\omega t + \varphi_u)\,\mathrm{d}t}\,. \tag{16}$$

Mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ ergibt sich der Mittelwert der $\cos^2$-Funktion zu

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} \cos^2(\omega t + \varphi_u)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t + \varphi_u)\right]_{t_1}^{t_1+T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{17}$$

Dieser Wert ist erwartungsgemäß unabhängig von der Wahl von t_1 und von φ_u. Mit (16) und (17) ergibt sich der Effektivwert einer zeitharmonischen Spannung

$$\boxed{u_{\mathrm{eff}} = \frac{|U|}{\sqrt{2}}.} \tag{18}$$

3. Leistungstransport auf Hochfrequenzleitungen

Auf einer Hochfrequenzleitung, die unter anderem dadurch gekennzeichnet ist, dass sie nicht kurz ist gegenüber der Signalwellenlänge, sind Spannung und Strom nicht mehr auf der ganzen Leitung konstant. Der Gehalt an Wirk- und Blindleistung ist daher eine Funktion der Längenkoordinate z entlang der Leitung. Zur Beschreibung der Verhältnisse auf HF-Leitungen verwendet man vorteilhaft Spannungs- und Stromwellen, die sich auf der Leitung ausbreiten. Im Fall des Einwellenbetriebs[1] gibt es auf einer Leitung allgemein zwei Wellen des gleichen Typs, die sich jeweils in $+z$- und in $-z$-Richtung ausbreiten. Die Gesamtspannung $U(z)$ und der Gesamtstrom $I(z)$ ergeben sich aus der Überlagerung dieser beiden Wellen und man erhält für eine verlustfreie Leitung

$$U(z) = U_{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + U_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z} \tag{19a}$$

$$I(z) = I_{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - I_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}, \tag{19b}$$

wobei U_{h} die Amplitude der in $+z$-Richtung laufenden Welle und U_{r} die Amplitude der in $-z$-Richtung laufenden Welle jeweils an der Stelle $z = 0$ darstellen. Spannung und Strom jeder Teilwelle sind durch $I_{\mathrm{h}} = U_{\mathrm{h}}/Z_{\mathrm{L}}$ bzw. $I_{\mathrm{r}} = U_{\mathrm{r}}/Z_{\mathrm{L}}$ über den Leitungswellenwiderstand Z_{L} miteinander verknüpft. Das Phasenmaß $\beta = 2\pi/\lambda$ beschreibt die Phasenänderung der Teilwellen bei ihrer Ausbreitung entlang der Leitung.

[1] Damit ist gemeint, dass auf der Leitung nur ein einziger Wellentyp vorkommt. Bei praktisch allen Wellenleiterstrukturen existieren oberhalb charakteristischer Grenzfrequenzen, die von der Wellenleitergeometrie und dem Wellentyp abhängen, beliebig viele weitere Wellentypen. Der Einwellenbetrieb muss daher durch eine ausreichend niedrige Signalfrequenz sichergestellt werden.

Im Falle einer Leistungsanpassung existiert nur die hinlaufende Welle. Das Auftreten einer reflektierten, rücklaufenden Welle kann mit dem Auftreten von Blindleistung in Verbindung gebracht werden. Führt man den Reflexionsfaktor $r = U_\mathrm{r}/U_\mathrm{h}$ ein und bildet dann die komplexe Scheinleistung an der Stelle z, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}U(z)I^*(z) = \frac{1}{2Z_\mathrm{L}}(U_\mathrm{h}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + U_\mathrm{r}\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z})(U_\mathrm{h}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - U_\mathrm{r}\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z})^* \\ = \frac{1}{2Z_\mathrm{L}}(U_\mathrm{h}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + U_\mathrm{r}\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z})({U_\mathrm{h}}^*\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z} - r^*{U_\mathrm{h}}^*\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}) \\ = \frac{|U_\mathrm{h}|^2}{2Z_\mathrm{L}}(1-|r|^2 + r\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z} - r^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}). \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei ist der Ausdruck $r\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z} - r^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}$ als Differenz zweier zueinander konjugiert komplexer Zahlen rein imaginär und die Zerlegung von (20) in Wirk- und Blindleistung ergibt mit $a - a^* = 2\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{a\}$ und Anwendung von (9) die Ausdrücke

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mathrm{W} &= \frac{|U_\mathrm{h}|^2}{2Z_\mathrm{L}}(1-|r|^2) = \frac{|U_\mathrm{h}|^2}{2Z_\mathrm{L}} - \frac{|U_\mathrm{r}|^2}{2Z_\mathrm{L}} && (21\mathrm{a}) \\ P_\mathrm{B} &= \frac{|U_\mathrm{h}|^2}{Z_\mathrm{L}}\cdot \mathrm{Im}\{r\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z}\} && (21\mathrm{b}) \end{aligned}}$$

für Wirk- und Blindleistung auf einer Hochfrequenzleitung. Erwartungsgemäß ergibt sich P_W als Differenz der von hin- und rücklaufender Welle transportierten Wirkleistungen und ist auf einer verlustfreien Leitung nicht abhängig vom Ort z auf der Leitung. Die Blindleistung hängt dagegen vom Imaginärteil des örtlichen Reflexionsfaktors ab. Sie verschwindet nur an den Stellen, an denen $r(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta z}$ und damit auch die Impedanz rein reell ist.

Eine äquivalente Darstellung erhält man bei einer Betrachtung dieses Sachverhaltes unter Verwendung von Wellengrößen. Die beiden Größen

$$a = \frac{U + Z_\mathrm{L}I}{2\sqrt{Z_\mathrm{L}}} = \frac{U_\mathrm{h}}{\sqrt{Z_\mathrm{L}}} = \sqrt{Z_\mathrm{L}}I_\mathrm{h} \tag{22a}$$

$$b = \frac{U - Z_\mathrm{L}I}{2\sqrt{Z_\mathrm{L}}} = \frac{U_\mathrm{r}}{\sqrt{Z_\mathrm{L}}} = \sqrt{Z_\mathrm{L}}I_\mathrm{r} \tag{22b}$$

stellen die Wellengrößen für die hin- und die rücklaufende Welle an der Stelle $z = 0$ dar [2, 7, 9]. Drückt man nun die Spannungen in (19) durch die Wellengrößen (22) aus und bildet wieder die komplexe Scheinleistung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}(a\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + b\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z})(a^*\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z} - b^*\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}) \\ = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2 + ba^*\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\beta z} - b^*a\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}) \end{aligned} \tag{23}$$

und damit

$$P_\mathrm{W} = \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2 \tag{24a}$$

$$P_\mathrm{B} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\{ba^*\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\beta z} - b^*a\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}\} = |a||b|\sin(2\beta z + \arg b - \arg a). \tag{24b}$$

Verwendet man wieder den Reflexionsfaktor r, um den Zusammenhang $b = ra$ zwischen hinlaufender und rücklaufender Welle zu beschreiben, so entsteht mit $\arg b = \arg a + \arg r$ die Darstellung

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mathrm{W} &= \frac{1}{2}|a|^2\left(1-|r|^2\right) \\ P_\mathrm{B} &= |a|^2|r| \cdot \sin(2\beta z + \arg r). \end{aligned}} \tag{25a, 25b}$$

A. Additionstheoreme

Produkt

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{26a}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{26b}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{26c}$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) - \sin(x-y)\Big) \tag{26d}$$

Summe

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{27a}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{27b}$$

Potenzen

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{28a}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{28b}$$

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
I	A	komplexe Amplitude des Stromes
I_h	A	Amplitude der vorlaufenden Stromwelle
I_r	A	Amplitude der rücklaufenden Stromwelle
P_W	W	Wirkleistung
P_B	W	Blindleistung
R	Ω	Resistanz
S	W	komplexe Scheinleistung
T	s	Periodendauer
U	V	komplexe Amplitude der Spannung
U_h	V	Amplitude der vorlaufenden Spannungswelle
U_r	V	Amplitude der rücklaufenden Spannungswelle
Y	S	Admittanz
Z	Ω	Impedanz
Z_L	Ω	Leitungswellenwiderstand
a	$\sqrt{\mathrm{W}}$	Wellengröße der vorlaufenden Welle
b	$\sqrt{\mathrm{W}}$	Wellengröße der rücklaufenden Welle
i	A	Strom
i_eff	A	Effektivwert des Stromes
p	W	Momentanleistung
r	1	Reflexionsfaktor
t	s	Zeit
u	V	Spannung
u_eff	V	Effektivwert der Spannung
z	m	Längenkoordinate
β	$^\mathrm{rad}/_\mathrm{m}$	Phasenmaß
λ	m	Wellenlänge
φ_i	rad	Phasenwinkel des Stromes
φ_u	rad	Phasenwinkel der Spannung
ω	$^\mathrm{rad}/_\mathrm{s}$	Kreisfrequenz
		– Zahlen –
e	1	Eulersche Zahl $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
j	1	imaginäre Einheit ($\mathrm{j}^2 = -1$)
π	1	Ludolfsche Zahl

Literatur

[1] C. A. Balanis: *Advanced Engineering Electromagnetics*. Chichester: John Wiley & Sons, 1989.

[2] H. Brand: *Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze*. Stuttgart: Hirzel-Verlag, 1970.

[3] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*. 24. Aufl. Frankfurt/M.: Verlag Harri Deutsch, 1989.

[4] R. E. Collin: *Foundations for Microwave Engineering*. 2nd ed. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Hoboken: Wiley & Sons, 2001.

[5] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 3. Aufl. München: Oldenbourg, 2009.

[6] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, August 31, 2010. url: http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa (visited on 05/19/2011).

[7] H. W. Schüssler: *Systemtheorie linearer elektrischer Netzwerke*. 2. Aufl. Bd. 1. Netzwerke, Signale und Systeme. Berlin: Springer, 1990.

[8] K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik*. 10. Aufl. Leipzig: Barth, Edition Dt. Verlag der Wissenschaften, 1993.

[9] R. Unbehauen: *Grundlagen der Elektrotechnik 1*. 4. Aufl. Berlin: Springer, 1994.

[10] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 1*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 6. Aufl. Berlin: Springer, 2000.