

Grundgleichungen der elektromagnetischen Theorie

Uwe Siart
tutorien@siart.de

11. März 2025 (Version 0.50)

Zusammenfassung

Dieses Tutorium möchte eine kurze Einführung in die wichtigsten Grundgleichungen der elektromagnetischen Feldtheorie geben und somit die Werkzeuge zur Berechnung elektromagnetischer Feldverteilungen bei vorgegebener Geometrie und Anregung zusammenstellen. Die Darstellung folgt dabei wesentlich den Lehrbüchern [7] und [9], die auch zur weiterführenden Lektüre empfohlen werden. Die neueste Version ist unter dem URL <http://www.siart.de/lehre/maxwell.pdf> erhältlich.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundgleichungen	2
1.1	Maxwellsche Gleichungen	2
1.2	Materialgleichungen	5
1.3	Randbedingungen an Grenzflächen	6
1.4	Wellengleichungen	7
1.5	Maxwellsche Gleichungen im Frequenzbereich	8
2	Hilfsmittel zur Feldberechnung	8
2.1	Dynamische Potenziale	8
2.2	Hertzscher Vektor	10
3	Wellentypen	10
3.1	TE-Wellen	11
3.2	TM-Wellen	11
3.3	Komplexe Wellen	11
3.4	Wellen in periodischen Strukturen	12

1 Grundgleichungen

1.1 Maxwell'sche Gleichungen

Jede elektromagnetische Feldverteilung gehorcht an jedem Ort \mathbf{r} und zu jeder Zeit t einem System von vier partiellen Differenzialgleichungen, die man als die *Maxwellschen Gleichungen* bezeichnet. Sie lauten im Zeitbereich

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad (1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right). \quad (1d)$$

Dabei sind \mathbf{E} die elektrische Feldstärke, \mathbf{B} die magnetische Flussdichte, ρ die räumliche Ladungsdichte und \mathbf{J} die Stromdichte. Der wesentliche Verdienst James Clerk Maxwells war die Ergänzung des Terms $\varepsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ in (1d) und in Folge dessen die Vorhersage elektromagnetischer Wellenphänomene. Durch Anwendung der Integralsätze von Gauß

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot dV \quad (2)$$

und von Stokes

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad (3)$$

lassen sich die Differenzialgleichungen (1a–d) überführen in äquivalente *Integralgleichungen*. Sie lauten dann

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV, \quad (4a)$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}, \quad (4b)$$

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (4c)$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \left(\iint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \right). \quad (4d)$$

Die Raumladungsdichte und die Stromdichte in (1) und (4) setzen sich dabei aus mehreren Komponenten zusammen:

$$\rho = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{f}} \quad (5a)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{f}} + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_{\text{pol}}. \quad (5b)$$

Neben der Dichte ρ_f freier Ladungen tritt in elektrisch polarisierten Materialien auch die Polarisationsladungsdichte ρ_{pol} auf. Wenn sich die elektrische Polarisation zeitlich ändert, werden Ladungen verschoben und es fließt die Polarisationsstromdichte J_{pol} . In magnetisch polarisierten Materialien ist als Folge der Überlagerung der Ringströme von ausgerichteten magnetischen Dipolen die Magnetisierungsstromdichte J_{mag} zu berücksichtigen. Mit diesen Größen gelten die Gleichungen (1) und (4) immer und überall, vor allem auch innerhalb beliebiger Materie.

Anmerkung 1 Die Maxwellschen Gleichungen (1a–d) werden häufig dahin gehend interpretiert, dass auf der rechten Seite die Ursachen für die Felder E und B stehen. Insbesondere werden gerne die zeitlichen Ableitungen $\partial B/\partial t$ und $\partial E/\partial t$ zu den physikalischen Ursachen der Felder gezählt, sodass man zu dem Schluss kommt: »Die beiden Felder erzeugen sich gegenseitig« (siehe zum Beispiel [10]). Diese Aussage mag im Hinblick auf die Lösungsfindung für die Maxwellschen Gleichungen hilfreich sein, weil die Felder E und B natürlich durch ihre Quellen- und Wirbeldichte vollständig festgelegt sind und diese Dichten bei bekannten rechten Seiten ebenfalls bekannt sind. Vom physikalischen Standpunkt ist diese Interpretation jedoch aus Sicht des Autors nicht tragfähig. Ein deutlicher Widerspruch entsteht, wenn man die integrale Form (4) der Maxwellschen Gleichungen betrachtet und man dabei bedenkt, dass beide Seiten dieser Gleichungen zu einem festen Zeitpunkt auszuwerten sind. Es werden also zur selben Zeit Feldgrößen in Beziehung gesetzt, die voneinander eine räumliche Distanz haben. Weil aber räumlich entfernte Wirkungen nicht ohne Verzögerung auftreten, können die Feldgrößen im Inneren eines Gebietes nicht die physikalischen Ursachen für die zur gleichen Zeit auf dem Rand des Gebietes herrschenden Felder sein. Dieser Sachverhalt ist in [9] mit großer Sorgfalt dargestellt und herausgearbeitet. Dort steht:

[9, S. 104] Durch die Maxwell-Gleichungen [...] werden die Quellen und Wirbel des elektrischen und magnetischen Feldes verknüpft mit der Ladungs- und Stromverteilung einerseits sowie mit $\partial B/\partial t$ und $\partial E/\partial t$ andererseits. Es werden dabei zunächst nur Gleichheiten festgestellt, die lokal und momentan überall und immer gelten.

Die Versuchung liegt nahe, darüber hinaus eine Interpretation vorzunehmen in dem Sinn, daß die rechten Seiten jener Gleichungen aufgefaßt werden als Ursachen der links stehenden Felder.

Versteht man dabei »Ursache« rein vektoranalytisch, dann ist nichts gegen eine solche Interpretation zu sagen; denn bei gegebenen rechten Seiten (zur festen Zeit t für alle r) sind E und B (zur gleichen Zeit als Funktion des Ortes) eindeutig bestimmt. Das folgt aus Abschnitt 1.10, wenn man als Randbedingung verlangt, daß beide Felder auf der Fernkugel (Umschreibung für $|r| \rightarrow \infty$) gegen Null gehen. [...]

Versteht man »Ursache« dagegen physikalisch, dann verbietet sich jene Interpretation wegen der Tatsache, daß physikalische Wirkungen an entfernten Orten nicht momentan eintreten. [...] Eine physikalische Interpretation des elektrodynamischen Formalismus ergibt sich zwanglos erst anhand der retardierten Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Kapitel 11. Dann wird auch formal klar, daß die *frühere* Verteilung von Ladungen und Strömen alleinige Ursache der *jetzt* vorliegenden Felder ist. Die Größen $\partial B/\partial t$ und $\partial E/\partial t$ zählen dabei *nicht* zu den *physikalischen* Ursachen von E und B . [...]

Jene vektoranalytische Interpretation der Maxwellschen Gleichungen (vorletzter Absatz) ist die traditionell übliche und wird natürlich durch die Schreibweise [...] aufgedrängt (Angabe der Quellen und Wirbel von E bzw. B).

Bei dieser an der räumlich dreidimensionalen Vektorrechnung orientierten Schreibweise werden nur die partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten kompakt in den Operatoren »div« und »rot« zusammengefaßt, so daß die partielle Ableitung nach der Zeitkoordinate gesondert angeschrieben werden muß. Dadurch entsteht der falsche Eindruck, daß es sich bei $\partial E/\partial t$ und $\partial B/\partial t$ um etwas Besonderes handelt.

Weiter steht dort als Anmerkung zum Satz von Helmholtz:

[9, S. 220] Der rein vektoranalytische, sich nur auf die Ortskoordinaten beziehende Satz von Helmholtz kann auch auf das Gleichungspaar [...] angewendet werden, und zwar zu jedem beliebigen Zeitpunkt t . Man erhält dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}', t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (6.63)$$

Entsprechend folgt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t)] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (6.64)$$

durch Anwendung des Satzes von Helmholtz auf das Gleichungspaar [...].

Die Integrale in den Gln. (6.63), (6.64) sind *momentan* auszuwerten, das heißt, daß im Aufpunkt \mathbf{r} zur Beobachtungszeit t Beiträge summiert werden, die zur *gleichen* Zeit t and *entfernten* Integrationspunkten \mathbf{r}' zu nehmen sind. Da aber *unverzögerte* Wirkungen in die Ferne physikalisch nicht in Frage kommen, sind beide Gleichungen rein mathematisch zu verstehen. Sie sind insbesondere keine Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Sinne von Kapitel 11, aber sie erläutern in expliziter Form das, was in Abschnitt 3.5 (dritter Absatz) die vektoranalytische Interpretation der Maxwell-Gleichungen genannt wurde.

Schließlich erläutern die Autoren in Kapitel 11 nach der Behandlung der retardierten Lösungen der Maxwell-Gleichungen:

[9, S. 329] Es ist jetzt also folgendes bewiesen. Die retardierten Potentiale [...] sind Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen [...], gehorchen der Lorentz-Bedingung [...], falls \mathbf{J} und ρ die Kontinuitätsgleichung erfüllen, und führen schließlich über die Ansätze [...] zu den retardierten Lösungen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (11.49a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.49b)$$

der Maxwell-Gleichungen.¹

Das alles läßt sich verbal so umschreiben: Elektromagnetische Felder werden von Strom- und Ladungselementen derart hervorgerufen, daß die Strecke zwischen Ursprungs- und Beobachtungsort mit Lichtgeschwindigkeit durchlaufen wird. Die felderzeugenden Ströme und Ladungen unterliegen der Kontinuitätsgleichung, wodurch \mathbf{E} und \mathbf{B} von Anfang an so miteinander verknüpft sind, daß sie immer und überall den Maxwell-Gleichungen gehorchen. Insbesondere erzeugen sie sich nicht gegenseitig, wie immer wieder unter Hinweis auf die Terme $\partial\mathbf{B}/\partial t$ und $\partial\mathbf{E}/\partial t$ in den Maxwell-Gleichungen gesagt wird. [...] Vielmehr bildet das elektromagnetische Feld eine räumlich-zeitliche Einheit, deren Bewegung keines internen Mechanismus bedarf. Bei der Bewegung von Körpern fragt man ja auch nicht nach inneren Gründen. Im einzelnen kann man sagen, daß \mathbf{B} -Felder ausschließlich von Strömen erzeugt werden, während \mathbf{E} -Felder sowohl von Ladungen als auch von zeitveränderlichen Strömen ausgehen.

In diesem Sinne ist die häufig anzutreffende Aussage, der Verschiebungsstrom $\epsilon_0(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ habe magnetische Wirkung, falsch. Gleichwohl ergibt es einen Sinn, den Term $\epsilon_0(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ als Stromdichte aufzufassen. Aus (1d) folgt nämlich, dass

$$\text{div} \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 .$$

¹Anm. des Autors: In dieser Darstellung wurde die retardierte Zeit $t^* = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c_0$ eingeführt.

Die Feldlinien des Verschiebungsstromes bilden also die stetige Fortsetzung der Linien der Ladungsstromdichte \mathbf{J} . Wenn der Ladungsstrom versiegt oder endet, dann erzeugen die sich anhäufenden Ladungen ein zeitveränderliches elektrisches Feld, welches als Verschiebungsstrom den Ladungsstrom fortsetzt. Der Verschiebungsstrom ist von einem magnetischen Feld begleitet, das er jedoch nicht selbst verursacht hat. Es wurde von den gleichen Strömen verursacht, die auch den Verschiebungsstrom verursacht haben und es breitete sich zusammen mit dem elektrischen Feld von den verursachenden Strömen her aus.²

Anmerkung 2 Das in Anmerkung 1 Gesagte scheint dem Huygensschen Prinzip zu widersprechen, welches besagt: »Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle aufgefasst werden. Das Gesamtfeld ergibt sich als Überlagerung aller dieser Kugelwellen.« Es ist jedoch zu beachten, dass mit diesem Prinzip nur eine Aussage über das zukünftige Feld in dem Gebiet jenseits der angesprochenen Wellenfront möglich ist. Sie gilt nicht für das Feld, welches sich in der Vergangenheit bis zu dieser Wellenfront ausgebreitet hat. Das Vorwissen, woher das Feld kommt und wohin es sich in Zukunft ausbreitet (d. h. die Kenntnis über den Ort der feldverursachenden Ladungen und Ströme), ist also Voraussetzung für die richtige Anwendung des Huygensschen Prinzips. Die Fläche, auf der die Huygensschen Ersatzquellen angenommen werden, muss die physikalischen Quellen des elektromagnetischen Feldes vollständig einschließen. Kannte man nur das Feld auf der Wellenfront und würde man es mangels Information über die Ausbreitungsrichtung als physikalische Ursache für die künftige elektromagnetische Feldverteilung auffassen, so würde man zumindest für das Gebiet auf einer Seite der Wellenfront zu einem falschen Ergebnis kommen. Wären dagegen die zeitveränderlichen Felder auf einer Wellenfront die *physikalische* Ursache für die von ihr zukünftig ausgehenden Felder, so dürfte es diese Unsymmetrie nicht geben.

In ähnliche Schwierigkeiten gerät man, wenn man eine wechselseitige Wirkung der Gleichungen (1b) und (1d) als den vermeintlichen Mechanismus auffasst, der eine elektromagnetische Welle vorantreibt. Wenn ein zeitveränderliches Feld an einem bestimmten Ort die physikalische Ursache für das jeweils andere Feld ist, dann lässt sich nicht erklären, weshalb eine Welle von dieser vermeintlichen Ursache weg nur in eine einzige Richtung »vorangetrieben« wird. Aus Symmetriegründen müsste dann in jeder Transversalebene einer homogenen ebenen Welle eine vorwärts und eine rückwärts laufende Welle »verursacht« werden. Ebenso bemüht man gerne in fragwürdiger Weise die *abwechselnde* Wirksamkeit von Induktions- und Durchflutungsgesetz (»E-Feld erzeugt H-Feld, das H-Feld erzeugt wiederum ein E-Feld«) um dann zu dem (natürlich richtigen) Ergebnis zu kommen, dass bei einer Wirkleistung transportierenden Welle die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} *gleichphasig* sind. Unabhängig vom Phasenunterschied zwischen \mathbf{E} und \mathbf{H} sind Induktions- und Durchflutungsgesetz an jedem Ort und zu jeder Zeit *gleichzeitig* (und nicht abwechselnd) in Kraft.

1.2 Materialgleichungen

Die Wechselwirkung elektrischer und magnetischer Felder mit Atomen innerhalb von Materie kann makroskopisch dadurch beschrieben werden, dass den Volumenelementen dV ein elektrisches Dipolmoment $d\mathbf{p}$ und ein magnetisches Dipolmoment $d\mathbf{m}$ zugewiesen wird. Man bezeichnet dann

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{dQ\boldsymbol{\ell}}{dV} = \rho\boldsymbol{\ell} \quad (6)$$

²Eine tiefere Einsicht in die Beziehung zwischen elektrischem und magnetischem Feld erlaubt die Relativitätstheorie. Sie beschreibt die unterschiedliche Wahrnehmung von Kräften in relativ zueinander bewegten Koordinatensystemen über die Lorentz-Transformation. Es kann gezeigt werden, dass die durch das magnetische Feld beschriebene Lorentz-Kraft $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ gerade gleich dem Unterschied in der elektrischen Kraft ist, wenn man das elektrische Feld entsprechend der Lorentz-Transformation vom Koordinatensystem einer mit \mathbf{v} bewegten Ladung in das ruhende Koordinatensystem des Beobachters transformiert.

als die *elektrische Polarisation*, hervorgerufen durch lokale Ladungsverschiebungen um den Vektor ℓ , sowie

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV} \quad (7)$$

als die *Magnetisierung*. Die *magnetische Polarisation* ist durch $\mu_0\mathbf{M}$ gegeben. Wenn die elektrische Polarisation \mathbf{P} und die Magnetisierung \mathbf{M} proportional zu den elektrischen und magnetischen Feldstärken \mathbf{E} und \mathbf{H} sind,³ dann gilt

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (8a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (8b)$$

für die elektrische Verschiebungsdichte \mathbf{D} und die magnetische Flussdichte \mathbf{B} . Die Größen Polarisationsladung, Polarisationsstrom und Magnetisierungsstrom hängen über

$$\rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (9a)$$

$$\mathbf{J}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (9b)$$

$$\mathbf{J}_{\text{mag}} = \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (9c)$$

mit den Vektoren der elektrischen Polarisation \mathbf{P} und der Magnetisierung \mathbf{M} zusammen. Weil die Polarisationsgrößen in der Regel nicht direkt zugänglich sind und meist nur die freien Ladungen und Ströme bekannt sind, verwendet man häufig die Schreibweise

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t) \quad (10a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (10b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (10c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (10d)$$

der Maxwell'schen Gleichungen. Die *Eigenschaften der Materie* sind hier durch

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (11a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (11b)$$

beschrieben und es treten daher des weiteren nur noch die freien Ladungen und Ströme auf. Eine Übersicht aller Formen der Maxwell'schen Gleichungen mit den jeweiligen Bedeutungen der darin vorkommenden Größen \mathbf{J} und ρ ist in Tabelle 1 auf Seite 15 gegeben.

1.3 Randbedingungen an Grenzflächen

An Grenzflächen zwischen verschiedenen Materialarten lassen sich aus der Integralform der Maxwell'schen Gleichungen durch Grenzübergänge zu infinitesimal kleinen geschlossenen Umläufen

³Der völlig allgemeine Fall, der hier nicht behandelt wird, ist ein tensorieller Zusammenhang zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} beziehungsweise zwischen \mathbf{M} und \mathbf{H} in anisotropen Materialien.

oder Volumina die *Bedingungen*

$$\operatorname{Div} \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (12a)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \mathbf{0} \quad (12b)$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0 \quad (12c)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{B} = \mathbf{n} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (12d)$$

für das Verhalten der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} an *Grenzflächen* ableiten. Der Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} weist dabei von der mit »-« zu der mit »+« bezeichneten Seite der Grenzfläche. Die Größen σ und \mathbf{K} sind jeweils die Flächenladungsdichte und die Flächenstromdichte in der Grenzfläche. Beide beinhalten hier wieder Polarisationsladungen und -ströme, sodass diese Grenzbedingungen auch die Unstetigkeiten der elektrischen Feldstärke oder der magnetischen Flussdichte an den Oberflächen polarisierter Dielektrika oder magnetisierter Ferrite beschreiben. In Worten bedeuten diese Randbedingungen [9]:

- Die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke ist an geladenen Flächen unstetig und sie springt dort um σ/ϵ_0 .
- Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist stetig.
- Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte ist stetig.
- Die zum Flächenstrom \mathbf{K} senkrechte Tangentialkomponente der magnetischen Flussdichte ist unstetig und springt dort um $\mu_0|\mathbf{K}|$. Die \mathbf{K} -parallele Tangentialkomponente ist stetig.

1.4 Wellengleichungen

Zur kompakten Schreibweise von partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten führen wir den *Nabla-Operator* ein, der in kartesischen Koordinaten geschrieben werden kann als

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} .$$

Es handelt sich also formal um einen Vektor, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten sind. Der sogenannte *Laplace-Operator* ergibt sich dann durch das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst in der Form

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) .$$

Damit ergeben sich die Produktschreibweisen

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$$

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

für die vektoranalytischen Operationen der Divergenz-, der Rotations- und der Gradientenbildung. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgen die *inhomogenen Wellengleichungen*

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (13a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{J} \quad (13b)$$

wobei

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c_0^2} .$$

1.5 Maxwell'sche Gleichungen im Frequenzbereich

Beschränkt man die Analyse auf eine harmonische Zeitabhängigkeit aller Feldgrößen in der Form $e^{j\omega t}$, dann lauten die Maxwell'schen Gleichungen in Differenzialform und im *Frequenzbereich*

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} , \quad (14a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) , \quad (14b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 , \quad (14c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) . \quad (14d)$$

Sämtliche Größen sind hier als ortsabhängige aber zeitunabhängige komplexe Zeiger dargestellt und die partielle Ableitung nach der Zeit geht über in eine Multiplikation mit $j\omega$. Der Übergang zu den korrespondierenden Größen im Zeitbereich erfolgt am Beispiel einer Vektorgröße $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} . \quad (15)$$

2 Hilfsmittel zur Feldberechnung

2.1 Dynamische Potenziale

Weil die magnetische Flussdichte nach (1c) unter allen Umständen quellfrei ist, lässt sie sich wegen

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

als Rotation eines sogenannten Vektorpotenzials \mathbf{A} darstellen. Es ist dann

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} . \quad (16)$$

Zusammen mit (1b) folgt dann

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} . \quad (17)$$

Das Feld $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ ist somit wirbelfrei und kann daher in der Form

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (18)$$

als Gradient eines skalaren Potenzials φ dargestellt werden. Die elektrische Feldstärke ergibt sich also aus den Potenzialen \mathbf{A} und φ über

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (19)$$

Mit (16) und (19) nehmen die Wellengleichungen (13) die Form

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu_0 \mathbf{J} \quad (20a)$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (20b)$$

an. Wählt man Lösungen so, dass die *Lorenz-Bedingung*

$$\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

erfüllt ist, dann sind diese Gleichungen entkoppelt und nehmen die deutlich einfachere Form

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (22a)$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (22b)$$

an. Es stellt sich heraus, dass die Gleichungen (22) tatsächlich Lösungen besitzen, welche der Lorenz-Bedingung (21) genügen. Im Frequenzbereich lautet die Lorenz-Bedingung

$$\text{div} \mathbf{A} + j\omega \varepsilon_0 \mu_0 \varphi = 0 \quad (23)$$

und die Wellengleichungen für die dynamischen Potentiale haben die Form

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{A} = (\nabla^2 + k_0^2) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (24a)$$

$$\nabla^2 \varphi + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varphi = (\nabla^2 + k_0^2) \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (24b)$$

mit dem Quadrat der Wellenzahl $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$.

Anmerkung 3 Die Wellenzahl ist eine Eigenschaft des Mediums, mit dem das Lösungsgebiet erfüllt ist. Für Vakuum ergibt sich $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Bei weiterer Untersuchung stellt sich heraus, dass die Wellenzahl in einem beliebigen Medium durch

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}$$

gegeben ist. Es stellt sich ferner heraus, dass Wirkverluste durch Leitfähigkeit und elektrische und magnetische Polarisationsverluste *im Frequenzbereich* adäquat und widerspruchsfrei durch komplexe Materialkonstanten

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' = |\varepsilon_r| e^{-j\delta_\varepsilon}$$

$$\mu_r = \mu_r' - j\mu_r'' = |\mu_r| e^{-j\delta_\mu}$$

mit $\varepsilon_r'' \geq 0$ und $\mu_r'' \geq 0$ beschrieben werden können. Dabei bezeichnet man $\delta_\varepsilon = \arctan(\varepsilon_r''/\varepsilon_r')$ als den dielektrischen Verlustwinkel und $\delta_\mu = \arctan(\mu_r''/\mu_r')$ als den magnetischen Verlustwinkel. In der Folge ergibt sich eine komplexe Wellenzahl

$$k = k' - jk'' = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')(\mu_r' - j\mu_r'')}$$

mit

$$k' = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{|\varepsilon_r| |\mu_r|} \cos\left(\frac{\delta_\varepsilon + \delta_\mu}{2}\right)$$

$$k'' = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{|\varepsilon_r| |\mu_r|} \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon + \delta_\mu}{2}\right).$$

Der aufgrund von $\delta_\varepsilon \neq 0$ und/oder $\delta_\mu \neq 0$ auftretende Imaginärteil $-k''$ beschreibt nun die exponentielle Bedämpfung ebener Wellen aufgrund der Verlustmechanismen des Mediums (siehe dazu auch Anmerkung 4 auf Seite 14).

2.2 Hertzscher Vektor

Wenn man die dynamischen Potentiale \mathbf{A} und φ über

$$\mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial t} \quad (25a)$$

$$\varphi = -\operatorname{div} \boldsymbol{\pi} \quad (25b)$$

von einem Vektor $\boldsymbol{\pi}$ (Hertzscher Vektor) ableitet, dann erfüllen sie von vornherein die Lorenz-Bedingung. In dielektrischen Materialien hängen Stromdichte und Raumladungsdichte über

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (26a)$$

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (26b)$$

mit der dielektrischen Polarisation \mathbf{P} zusammen. Damit ergibt sich für den Hertzschen Vektor die *Wellendifferenzialgleichung*

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad (27)$$

welche im Frequenzbereich

$$(\nabla^2 + k_0^2) \boldsymbol{\pi} = -\frac{\mathbf{J}}{j\omega \varepsilon_0} \quad (28)$$

lautet. Im quellenfreien Raum ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$) wird daraus die homogene *Helmholtz-Gleichung*

$$(\nabla^2 + k_0^2) \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}. \quad (29)$$

3 Wellentypen

Die folgenden Betrachtungen finden ausschließlich im Frequenzbereich statt, gründen also auf den Maxwell'schen Gleichungen in der Form (14).

3.1 TE-Wellen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit suchen wir Lösungen der Wellengleichungen im quellenfreien Raum, die keine y -Abhängigkeit besitzen ($\partial/\partial y = 0$ für alle Feldkomponenten). TE-Wellen bestehen ausschließlich aus den Komponenten E_y , H_x und H_z . Der Name TE (transversal elektrisch) rührt daher, dass das elektrische Feld nur eine transversale Komponente hat. Die transversale elektrische Feldkomponente E_y gehorcht der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_y = 0 . \quad (30)$$

Die Komponenten des magnetischen Feldes folgen aus E_y über

$$H_x = -j \frac{1}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (31a)$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} . \quad (31b)$$

3.2 TM-Wellen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit suchen wir Lösungen der Wellengleichungen im quellenfreien Raum, die keine y -Abhängigkeit besitzen ($\partial/\partial y = 0$ für alle Feldkomponenten). TM-Wellen bestehen ausschließlich aus den Komponenten H_y , E_x und E_z . Der Name TM (transversal magnetisch) rührt daher, dass das magnetische Feld nur eine transversale Komponente hat. Die transversale magnetische Feldkomponente H_y gehorcht der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_y = 0 . \quad (32)$$

Die Komponenten des elektrischen Feldes folgen aus H_y über

$$E_x = j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (33a)$$

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} . \quad (33b)$$

3.3 Komplexe Wellen

Stellvertretend für eine beliebige Komponente des elektromagnetischen Feldes betrachten wir die Eigenschaften einer zweidimensionalen skalaren Funktion $u(x, z)$, die keine Abhängigkeit von der y -Koordinate besitze. Sie gehorche der zweidimensionalen Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u(x, z) = 0 , \quad (34)$$

und besitzt daher die Form

$$u(x, z) = u_0 \cdot e^{-jk_x x - jk_z z} \quad (35)$$

mit

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 . \quad (36)$$

Die Wellenzahlen k_x und k_z können im Allgemeinen komplex sein, also

$$k_x = k'_x - jk''_x \qquad k_z = k'_z - jk''_z .$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile in (36) folgen die Bedingungen

$$k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 = k^2 \qquad (37a)$$

$$k'_x k''_x + k'_z k''_z = 0 , \qquad (37b)$$

wobei das Medium als verlustfrei angenommen wird, also $\text{Im}\{k\} = 0$. Die Funktion (35) lässt sich auch in der Form

$$u(x, z) = u_0 \cdot e^{-j(k'_x x + k'_z z) - (k''_x x + k''_z z)} = u_0 \cdot e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}} \qquad (35')$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_x + z \cdot \mathbf{e}_z \qquad \mathbf{k} = k'_x \cdot \mathbf{e}_x + k'_z \cdot \mathbf{e}_z \qquad \boldsymbol{\alpha} = k''_x \cdot \mathbf{e}_x + k''_z \cdot \mathbf{e}_z .$$

notieren. Die Ebenen konstanter Phase sind beschrieben durch $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ und die Ebenen konstanter Amplitude sind beschrieben durch $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$. Daraus folgt auch, dass die Ebenen konstanter Phase senkrecht zu \mathbf{k} und die Ebenen konstanter Amplitude senkrecht zu $\boldsymbol{\alpha}$ sind. In einem verlustfreien Medium gilt mit der Bedingung (37b)

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha} = k'_x k''_x + k'_z k''_z = 0 ,$$

das heißt, in einem verlustfreien Medium stehen die Ebenen konstanter Phase auch senkrecht auf den Ebenen konstanter Amplitude.

Weil Dämpfungs- und Phasenkonstanten in x - und z -Richtung über die Bedingungen (37) zusammenhängen, lassen sich verschiedene Typen komplexer Wellen klassifizieren. Breitet sich beispielsweise eine Welle in z -Richtung mit verlangsamter Phasengeschwindigkeit ($k'_z > k$) und ohne Verluste ($k''_z = 0$) aus, dann muss wegen

$$k_x'^2 = k^2 - k_z'^2 < 0$$

die Wellenzahl k_x rein imaginär ($k_x = -jk''_x$) sein, wobei zusätzlich $k''_x = \sqrt{(k'_z)^2 - k^2}$ gilt. Eine derartige Welle ist also in x -Richtung reaktiv bedämpft und zwar umso stärker, je stärker sie verzögert ist (engl.: slow wave). Komplexe Wellen bilden auch die Grundlage zur Beschreibung verschiedener Arten von Oberflächenwellen, die sich entlang von Grenzflächen zwischen verschiedenartigen Medien ausbreiten.

3.4 Wellen in periodischen Strukturen

Elektromagnetische Wellen, die sich unter räumlich periodischen Randbedingungen mit der Periode L ausbreiten, sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre vektorielle Struktur ebenfalls periodisch mit der Periode L ist und dass sich die Feldamplituden von Periode zu Periode nur um einen komplexen Skalierungsfaktor C unterscheiden [4, 7, 11]. Nehmen wir vereinfachend an, dass die Ausbreitung verlustfrei erfolgt, so können wir C in der Form $C = e^{-j\beta L}$ schreiben. Bezeichnen wir die

Längenkoordinate entlang der Ausbreitungsrichtung mit z und die komplexe Amplitude der Welle mit $u(z)$, dann gilt

$$u(z + L) = e^{-j\beta L} u(z) . \quad (38)$$

Definieren wir nun ausgehend von $u(z)$ eine neue Funktion

$$R(z) = e^{j\beta z} u(z) , \quad (39)$$

so erkennt man, dass $R(z)$ periodisch in z ist mit der Periode L , denn es ist

$$R(z + L) = e^{j\beta(z+L)} u(z + L) = e^{j\beta(z+L)} e^{-j\beta L} u(z) = R(z) . \quad (40)$$

Daraus folgt aber wiederum, dass $R(z)$ durch eine Fourierreihe der Form

$$R(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-j2n\pi z/L} \quad (41)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} R(z) e^{j2n\pi z/L} dz \quad (42)$$

dargestellt werden kann. Damit und durch Umkehrung von (39) lässt sich $u(z)$ darstellen als

$$u(z) = e^{-j\beta z} R(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-j(\beta+2n\pi/L)z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-j\beta_n z} \quad (43)$$

mit

$$\boxed{\beta_n = \beta + \frac{2n\pi}{L} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} .} \quad (44)$$

Eine Welle $u(z)$, die sich unter periodischen Randbedingungen ausbreitet, lässt sich also zerlegen in eine unendliche Summe von Teilwellen mit den Amplituden A_n und den Phasenmaßen β_n nach (44). Diese Teilwellen werden als *Raumharmonische* (engl.: space harmonics, Hartree harmonics) bezeichnet. Die Aussage über die entsprechende Darstellbarkeit von Wellen in periodischen Strukturen ist in der elektromagnetischen Theorie als *Floquet-Theorem* bekannt. Man bestätigt leicht, dass die Gruppengeschwindigkeiten $v_{gn} = d\omega/d\beta_n$ aller Raumharmonischen identisch sind. Ihre Phasengeschwindigkeiten

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta + 2\pi n/L} \quad (45)$$

sind jedoch unterschiedlich und können auch negative Werte annehmen [3]. Es handelt sich bei Letzteren um Wellen, bei denen die Phasengeschwindigkeit der Gruppengeschwindigkeit entgegengerichtet ist. Man spricht dann von sogenannten *Rückwärtswellen* (engl.: backward wave).

Anmerkung 4 Zur Notation der Ausbreitungseigenschaften einer elektromagnetischen Welle existieren zwei Konventionen, auf die zur Vermeidung von Verwechslungen kurz hingewiesen sei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei z die Ausbreitungsrichtung einer Welle. Die Änderung ihres Amplituden- und Phasenzustandes in Ausbreitungsrichtung wird beschrieben durch das *Dämpfungsmaß* α (in 1/m) und das *Phasenmaß* β (in rad/m). Der Zustand der elektromagnetischen Welle variiert dann in z -Richtung mit exponentieller Abhängigkeit gemäß

$$u(z) = u_0 e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} . \quad (46)$$

Zur kompakten Notation der Exponentialterme schreibt man (46) entweder in der Form

$$u(z) = u_0 e^{-\gamma z} \quad (47)$$

mit dem komplexen *Ausbreitungsmaß* γ oder in der Form

$$u(z) = u_0 e^{-jkz} \quad (48)$$

mit der komplexen *Wellenzahl* k . Durch Vergleich mit (46) wird klar, dass damit den Real- und Imaginärteilen von Ausbreitungsmaß γ und Wellenzahl k unterschiedliche Bedeutungen bezüglich Amplituden- und Phasenänderung zukommen, denn es ist

$$\gamma = \alpha + j\beta = jk \quad \text{und} \quad k = \beta - j\alpha = -j\gamma$$

oder umgekehrt

$$\alpha = \operatorname{Re}\{\gamma\} = -\operatorname{Im}\{k\} \quad \text{und} \quad \beta = \operatorname{Im}\{\gamma\} = \operatorname{Re}\{k\} .$$

Tabelle 1: Verschiedene Formen der Maxwell'schen Gleichungen. Aus Platzgründen wurde hier auf die explizite Angabe der Abhängigkeiten von \mathbf{r} und/oder t sowie auf die Kennzeichnung der Dimensionalität durch Mehrfachintegrale verzichtet.

		Zeitbereich		Frequenzbereich	
		Integralform	Differenzialform	Integralform	Differenzialform
allgemein	$J = J_f + J_{\text{mag}} + J_{\text{pol}}$ $\rho = \rho_f + \rho_{\text{pol}}$	$\int_{\partial A} \mathbf{B} \, ds = \mu_0 \left(\int_A \mathbf{J} \, dA + \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, dA \right)$ $- \int_{\partial A} \mathbf{E} \, ds = \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dA$ $\int_{\partial V} \mathbf{B} \, dA = 0$ $\int_{\partial V} \mathbf{E} \, dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ $- \text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$ $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int_{\partial A} \mathbf{B} \, ds = \mu_0 \left(\int_A \mathbf{J} \, dA + j\omega \varepsilon_0 \int_A \mathbf{E} \, dA \right)$ $- \int_{\partial A} \mathbf{E} \, ds = j\omega \int_A \mathbf{B} \, dA$ $\int_{\partial V} \mathbf{B} \, dA = 0$ $\int_{\partial V} \mathbf{E} \, dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E})$ $- \text{rot } \mathbf{E} = j\omega \mathbf{B}$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$ $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
	mit Materialgrößen	$J = J_f$ $\rho = \rho_f$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$	$\int_{\partial A} \mathbf{H} \, ds = \int_A \mathbf{J} \, dA + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, dA$ $- \int_{\partial A} \mathbf{E} \, ds = \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dA$ $\int_{\partial V} \mathbf{B} \, dA = 0$ $\int_{\partial V} \mathbf{D} \, dA = \int_V \rho \, dV$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $- \text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$ $\text{div } \mathbf{D} = \rho$	$\int_{\partial A} \mathbf{H} \, ds = \int_A \mathbf{J} \, dA + j\omega \int_A \mathbf{D} \, dA$ $- \int_{\partial A} \mathbf{E} \, ds = j\omega \int_A \mathbf{B} \, dA$ $\int_{\partial V} \mathbf{B} \, dA = 0$ $\int_{\partial V} \mathbf{D} \, dA = \int_V \rho \, dV$

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
E_x, E_y, E_z	V/m	Komponenten der elektrischen Feldstärke (kartesisch)
H_x, H_y, H_z	A/m	Komponenten der magnetischen Feldstärke (kartesisch)
c_0	m/s	Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ($c_0 = 299792458$ m/s)
dV	m^3	infinitesimales Volumenelement
k'	rad/m	Realteil der Wellenzahl (Phasenmaß)
k''	Np/m	negativer Imaginärteil der Wellenzahl (Dämpfungsmaß)
k_0	rad/m	Wellenzahl im Vakuum
k_x, k_y, k_z	rad/m	Wellenzahlen in x -, y -, und z -Richtung
q	As	Ladung
t	s	Zeit
$u(z)$	bel.	skalärer Zustand einer Welle
v_g	m/s	Gruppengeschwindigkeit
v_p	m/s	Phasengeschwindigkeit
α	Np/m	Dämpfungsmaß
β	rad/m	Phasenmaß
ϵ_0	As/(Vm)	Vakuum-Permittivität ($\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm))
ϵ_r	1	relative Permittivität
μ_0	Vs/(Am)	Vakuum-Permeabilität ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am))
μ_r	1	relative Permeabilität
ρ	As/m ³	Raumladungsdichte
σ	As/m ²	Flächenladungsdichte
φ	V	skalares Potenzial
χ_e	1	elektrische Suszeptibilität
χ_m	1	magnetische Suszeptibilität
ω	rad/s	Kreisfrequenz

– Vektorgrößen –

\mathbf{A}	Vs/m	Vektorpotenzial
\mathbf{B}	Vs/m ²	Vektor der magnetischen Flussdichte
\mathbf{D}	As/m ²	Vektor der elektrischen Verschiebungsdichte
\mathbf{E}	V/m	Vektor der elektrischen Feldstärke
\mathbf{H}	A/m	Vektor der magnetischen Feldstärke
\mathbf{J}	A/m ²	Vektor der Stromdichte
\mathbf{K}	A/m	Vektor der Flächenstromdichte
\mathbf{M}	A/m	Vektor der Magnetisierung
\mathbf{P}	As/m ²	Vektor der elektrischen Polarisation
$d\mathbf{A}$	m ²	vektorielles infinitesimales Flächenelement
$d\mathbf{r}$	m	vektorielles infinitesimales Wegelement
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	1	Koordinateneinheitsvektoren (kartesisch)
\mathbf{k}	1/m	Wellenvektor
\mathbf{l}	m	Verschiebungsvektor
\mathbf{m}	Am ²	magnetisches Dipolmoment
\mathbf{n}	1	Normaleneinheitsvektor

Symbol	Einheit	Bedeutung
\mathbf{p}	Asm	elektrisches Dipolmoment
\mathbf{r}	m	Ortsvektor
\mathbf{v}	m/s	Geschwindigkeitsvektor
$\boldsymbol{\pi}$	Vm	Hertzscher Vektor
– Mengen –		
∂A		der Rand der Fläche A (eine geschlossene Kurve)
∂V		der Rand des Volumens V (eine geschlossene Hülle)
– Zahlen –		
e	1	Eulersche Zahl $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
j	1	imaginäre Einheit ($j^2 = -1$)
π	1	Ludolfsche Zahl

Literatur

- [1] C. A. Balanis: *Advanced Engineering Electromagnetics*. Chichester: John Wiley & Sons, 1989.
- [2] R. E. Collin: *Antennas and Radiowave Propagation*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- [3] R. E. Collin: *Foundations for Microwave Engineering*. 2nd ed. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Hoboken: Wiley & Sons, 2001.
- [4] M. J. Gans: "A General Proof of Floquet's Theorem". In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* MTT-13.3 (May 1965), pp. 384–385.
- [5] D. J. Griffiths: *Elektrodynamik*. 3. Aufl. München: Pearson Education, 2011.
- [6] D. A. Hill: *Electromagnetic Fields in Cavities. Deterministic and Statistical Theories*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2009.
- [7] A. Ishimaru: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [8] K. Kark: *Antennen und Strahlungsfelder*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.
- [9] R. Kröger und R. Unbehauen: *Elektrodynamik*. 3. Aufl. Stuttgart: Teubner, 1993.
- [10] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, August 1, 2016. URL: <https://www.ece.rutgers.edu/orfanidis> (visited on 03/11/2025).
- [11] E. J. Rothwell and M. J. Cloud: *Electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press, 2001.
- [12] K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik*. 10. Aufl. Leipzig: Barth, Edition Dt. Verlag der Wissenschaften, 1993.
- [13] J. Van Bladel: *Electromagnetic Fields*. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- [14] J. Van Bladel: "Lorenz or Lorentz?" In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 33.2 (April 1991), p. 69.