Grundgleichungen der elektromagnetischen Theorie

http://www.siart.de/lehre/maxwell.pdf

Uwe Siart

tutorien@siart.de

4. Januar 2012 (Version 0.33)

Zusammenfassung

Dieses Tutorium möchte eine kurze Einführung in die wichtigsten Grundgleichungen der elektromagnetischen Feldtheorie geben und somit die Werkzeuge zur Berechnung elektromagnetischer Feldverteilungen bei vorgegebener Geometrie und Anregung zusammenstellen. Die Darstellung folgt dabei wesentlich den Lehrbüchern [5] und [7], die auch zur weiterführenden Lektüre empfohlen werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundgleichungen

1.1 Maxwellsche Gleichungen

Jede elektromagnetische Feldverteilung gehorcht an jedem Ort $\boldsymbol{r}$ und zu jeder Zeit t einem System von vier partiellen Differenzialgleichungen, die man als die *Maxwellschen Gleichungen* bezeichnet. Sie lauten im Zeitbereich

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \tag{1b}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1c}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right). \tag{1d}$$

Dabei sind $\boldsymbol{E}$ die elektrische Feldstärke, $\boldsymbol{B}$ die magnetische Flussdichte, ρ die räumliche Ladungsdichte und $\boldsymbol{J}$ die Stromdichte. Der wesentliche Verdienst James Clerk Maxwells war die Ergänzung des Terms $\varepsilon_0(\partial\boldsymbol{E}/\partial t)$ in (1d) und in Folge dessen die Vorhersage elektromagnetischer Wellenphänomene. Durch Anwendung der Integralsätze von Gauß

$$\oiint_{\partial V}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}V \tag{2}$$

und von Stokes

$$\oint_{\partial A}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_A \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3}$$

lassen sich die Differenzialgleichungen (1a–d) überführen in äquivalente *Integralgleichungen*. Sie lauten dann

$$\oiint_{\partial V}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}V, \tag{4a}$$

$$\oint_{\partial A}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\iint_A \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}, \tag{4b}$$

$$\oiint_{\partial V}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0, \tag{4c}$$

$$\oint_{\partial A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0\left(\iint_A \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\iint_A \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right). \tag{4d}$$

Die Raumladungsdichte und die Stromdichte in (1) und (4) setzen sich dabei aus mehreren Komponenten zusammen:

$$\rho = \rho_{\mathrm{pol}} + \rho_{\mathrm{f}} \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{mag}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{pol}}. \tag{5b}$$

Neben der Dichte ρ_f freier Ladungen tritt in elektrisch polarisierten Materialien auch die Polarisationsladungsdichte ρ_{pol} auf. Wenn sich die elektrische Polarisation zeitlich ändert, werden Ladungen verschoben und es fließt die Polarisationsstromdichte $\boldsymbol{J}_{pol}$. In magnetisch polarisierten Materialien ist als Folge der Überlagerung der Ringströme von ausgerichteten magnetischen Dipolen die Magnetisierungsstromdichte $\boldsymbol{J}_{mag}$ zu berücksichtigen. Mit diesen Größen gelten die Gleichungen (1) und (4) immer und überall, vor allem auch innerhalb beliebiger Materie.

Anmerkung 1 Die Maxwellschen Gleichungen (1a–d) werden häufig dahin gehend interpretiert, dass auf der rechten Seite die Ursachen für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ stehen. Insbesondere werden gerne die zeitlichen Ableitungen $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ und $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ zu den physikalischen Ursachen der Felder gezählt, sodass man zu dem Schluss kommt: »Die beiden Felder erzeugen sich gegenseitig« (siehe z. B. [8]). Diese Aussage mag im Hinblick auf die Lösungsfindung für die Maxwellschen Gleichungen hilfreich sein, weil die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ natürlich durch ihre Quellen- und Wirbeldichte vollständig festgelegt sind und diese Dichten bei bekannten rechten Seiten ebenfalls bekannt sind. Vom physikalischen Standpunkt ist diese Interpretation jedoch aus Sicht des Autors nicht tragfähig. Ein deutlicher Widerspruch entsteht, wenn man die integrale Form (4) der Maxwellschen Gleichungen betrachtet und man dabei bedenkt, dass beide Seiten dieser Gleichungen zu einem festen Zeitpunkt auszuwerten sind. Es werden also zur selben Zeit Feldgrößen in Beziehung gesetzt, die voneinander eine räumliche Distanz haben. Weil aber räumlich entfernte Wirkungen nicht ohne Verzögerung auftreten, können die Feldgrößen im Inneren eines Gebietes nicht die physikalischen Ursachen für die zur gleichen Zeit auf dem Rand des Gebietes herrschenden Felder sein.

Eine schlüssige und widerspruchsfreie Interpretation ist dagegen die Folgende: magnetische Felder werden von Strömen erzeugt, elektrische Felder haben ihre physikalische Ursache in Ladungen und in zeitveränderlichen Strömen. Beide Felder breiten sich mit endlicher Geschwindigkeit von ihren Ursachen weg aus. Sie sind von Anbeginn nicht unabhängig voneinander sondern sie sind so miteinander verknüpft, dass immer und überall die Maxwellschen Gleichungen gelten. Der Grund für diesen Zusammenhang besteht darin, dass Ströme und Ladungen nicht unabhängig voneinander sind.[1] Sie gehorchen der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

die sich auch über wenige Zwischenschritte von den Maxwellschen Gleichungen ableiten lässt und somit in ihnen enthalten ist.

In diesem Sinne ist die häufig anzutreffende Aussage, der Verschiebungsstrom $\varepsilon_0(\partial\boldsymbol{E}/\partial t)$ habe magnetische Wirkung, falsch. Die Maxwellschen Gleichungen machen keine Aussage über Ursachen und Wirkungen sondern sie geben Gleichheiten und Beziehungen an, die immer und überall gelten. Gleichwohl macht es Sinn, den Term $\varepsilon_0(\partial\boldsymbol{E}/\partial t)$ als Stromdichte aufzufassen. Aus (1d) folgt nämlich, dass

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0.$$

Die Feldlinien des Verschiebungsstromes bilden also die stetige Fortsetzung der Linien der Ladungsstromdichte $\boldsymbol{J}$. Wenn der Ladungsstrom versiegt oder endet, dann erzeugen die sich anhäu-

[1] Eine tiefere Einsicht in die Beziehung zwischen elektrischem und magnetischem Feld erlaubt die Relativitätstheorie. Sie beschreibt die unterschiedliche Wahrnehmung von Kräften in relativ zueinander bewegten Koordinatensystemen über die Lorentz-Transformation. Es kann gezeigt werden, dass die durch das magnetische Feld beschriebene Lorentz-Kraft $q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ gerade gleich dem Unterschied in der elektrischen Kraft ist, wenn man das elektrische Feld entsprechend der Lorentz-Transformation vom Koordinatensystem einer mit $\boldsymbol{v}$ bewegten Ladung in das ruhende Koordinatensystem des Beobachters transformiert.

fenden Ladungen ein zeitveränderliches elektrisches Feld, welches als Verschiebungsstrom den Ladungsstrom fortsetzt. Der Verschiebungsstrom ist von einem magnetischen Feld begleitet, das er jedoch nicht selbst verursacht hat. Es wurde von den gleichen Strömen verursacht, die auch den Verschiebungsstrom verursacht haben und es breitete sich zusammen mit dem elektrischen Feld von den verursachenden Strömen her aus.

Anmerkung 2 Das in Anmerkung 1 Gesagte scheint dem Huygensschen Prinzip zu widersprechen, welches besagt: »Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle aufgefasst werden. Das Gesamtfeld ergibt sich als Überlagerung aller dieser Kugelwellen.« Es ist jedoch zu beachten, dass mit diesem Prinzip nur eine Aussage über das zukünftige Feld in dem Gebiet jenseits der angesprochenen Wellenfront möglich ist. Sie gilt nicht für das Feld, welches sich in der Vergangenheit bis zu dieser Wellenfront ausgebreitet hat. Das Vorwissen, woher das Feld kommt und wohin es sich in Zukunft ausbreitet (d. h. die Kenntnis über den Ort der feldverursachenden Ladungen und Ströme), ist also Voraussetzung für die richtige Anwendung des Huygensschen Prinzips. Die Fläche, auf der die Huygensschen Ersatzquellen angenommen werden, muss die physikalischen Quellen des elektromagnetischen Feldes vollständig einschließen. Kannte man nur das Feld auf der Wellenfront und würde man es mangels Information über die Ausbreitungsrichtung als physikalische Ursache für die künftige elektromagnetische Feldverteilung auffassen, so würde man zumindest für das Gebiet auf einer Seite der Wellenfront zu einem falschen Ergebnis kommen. Wären dagegen die zeitveränderlichen Felder auf einer Wellenfront die *physikalische* Ursache für die von ihr zukünftig ausgehenden Felder, so dürfte es diese Unsymmetrie nicht geben.

In ähnliche Schwierigkeiten gerät man, wenn man eine wechselseitige Wirkung der Gleichungen (1b) und (1d) als den Mechanismus auffasst, der eine elektromagnetische Welle vorantreibt. Wenn ein zeitveränderliches Feld an einem bestimmten Ort die physikalische Ursache für das jeweils andere Feld ist, dann lässt sich nicht erklären, weshalb eine Welle von dieser vermeintlichen Ursache weg nur in eine Richtung läuft. Aus Symmetriegründen müsste dann in jeder Transversalebene einer homogenen ebenen Welle eine vorwärts und eine rückwärts laufende Welle »verursacht« werden. Ebenso bemüht man gerne in fragwürdiger Weise die *abwechselnde* Wirksamkeit von Induktions- und Durchflutungsgesetz (»E-Feld erzeugt H-Feld, das H-Feld erzeugt wiederum ein E-Feld«) um dann zu dem (natürlich richtigen) Ergebnis zu kommen, dass bei einer Wirkleistung transportierenden Welle die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ *gleichphasig* sind. Unabhängig vom Phasenunterschied zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ sind Induktions- und Durchflutungsgesetz an jedem Ort und zu jeder Zeit *gleichzeitig* in Kraft.

1.2 Materialgleichungen

Wenn die elektrische Polarisation $\boldsymbol{P}$ und die magnetische Polarisation $\boldsymbol{M}$ (die Magnetisierung) proportional zu den elektrischen und magnetischen Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ sind, dann gilt

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e})\boldsymbol{E} \quad = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{6a}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi_\mathrm{m})\boldsymbol{H} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{6b}$$

für die elektrische Verschiebungsdichte $\boldsymbol{D}$ und die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$. Die Größen Polarisationsladung, Polarisationsstrom und Magnetisierungsstrom hängen über

$$\rho_\mathrm{pol} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P} \tag{7a}$$
$$\boldsymbol{J}_\mathrm{mag} = \operatorname{rot}\boldsymbol{M} \tag{7b}$$
$$\boldsymbol{J}_\mathrm{pol} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{7c}$$

mit den Vektoren der elektrischen und magnetischen Polarisation $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{M}$ zusammen. Weil die Polarisationsgrößen in der Regel nicht direkt zugänglich sind und meist nur die freien Ladungen und Ströme bekannt sind, verwendet man häufig die Schreibweise

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r},t) \tag{8a}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{8b}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{8c}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{8d}$$

der Maxwellschen Gleichungen. Die *Eigenschaften der Materie* sind hier durch

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon_{\mathrm{r}}\,\boldsymbol{E} \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\,\mu_{\mathrm{r}}\,\boldsymbol{H} \tag{9b}$$

beschrieben und es treten daher des weiteren nur noch die freien Ladungen und Ströme auf. Eine Übersicht aller Formen der Maxwellschen Gleichungen mit den jeweiligen Bedeutungen der darin vorkommenden Größen $\boldsymbol{J}$ und ρ ist in Tabelle 1 auf Seite 12 gegeben.

1.3 Randbedingungen an Grenzflächen

An Grenzflächen zwischen verschiedenen Materialarten lassen sich aus der Integralform der Maxwellschen Gleichungen durch Grenzübergänge zu infinitesimal kleinen Volumina die *Bedingungen*

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}^+ - \boldsymbol{E}^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{10a}$$

$$\operatorname{Rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}^+ - \boldsymbol{E}^-) = \boldsymbol{0} \tag{10b}$$

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-) = 0 \tag{10c}$$

$$\operatorname{Rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-) = \mu_0\boldsymbol{K} \tag{10d}$$

für das Verhalten der Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ *an Grenzflächen* ableiten. Der Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ weist dabei von der mit »–« zu der mit »+« bezeichneten Seite der Grenzfläche. Die Größen σ und $\boldsymbol{K}$ sind jeweils die Flächenladungsdichte und die Flächenstromdichte in der Grenzfläche. Beide beinhalten hier wieder Polarisationsladungen und -ströme, sodass diese Grenzbedingungen auch die Unstetigkeiten der elektrischen Feldstärke oder der magnetischen Flussdichte an den Oberflächen polarisierter Dielektrika oder magnetisierter Ferrite beschreiben. In Worten bedeuten diese Randbedingungen [7]:

- Die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke ist an geladenen Flächen unstetig und sie springt dort um σ/ε_0.
- Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist stetig.
- Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte ist stetig.
- Die zum Flächenstrom $\boldsymbol{K}$ senkrechte Tangentialkomponente der magnetischen Flussdichte ist unstetig und springt dort um $\mu_0|\boldsymbol{K}|$. Die $\boldsymbol{K}$-parallele Tangentialkomponente ist stetig.

1.4 Wellengleichungen

Zur verkürzten Schreibweise von partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten führen wir in kartesischen Koordinaten den *Nabla-Operator*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}}$$

und den *Laplace-Operator*

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

ein. Damit ergeben sich die Produktschreibweisen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \qquad \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

für die vektoranalytischen Operationen der Divergenz-, der Rotations- und der Gradientenbildung. Aus den Maxwellschen Gleichungen folgen die *inhomogenen Wellengleichungen*

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(11\mathrm{a}) \\ &(11\mathrm{b}) \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{{c_0}^2}\,.$$

1.5 Maxwellsche Gleichungen im Frequenzbereich

Beschränkt man sich auf eine harmonische Zeitabhängigkeit aller Feldgrößen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, dann lauten die Maxwellschen Gleichungen in Differenzialform und im *Frequenzbereich*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}, \tag{12a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}), \tag{12b}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{12c}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \Big(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \Big). \tag{12d}$$

Sämtliche Größen sind hier als ortsabhängige aber zeitunabhängige komplexe Zeiger dargestellt und die partielle Ableitung nach der Zeit korrespondiert mit einer Multiplikation mit $\mathrm{j}\omega$.

2 Hilfsmittel zur Feldberechnung

2.1 Dynamische Potenziale

Weil die magnetische Flussdichte nach (1c) unter allen Umständen quellfrei ist, lässt sie sich wegen

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$$

als Rotation eines so genannten Vektorpotenzials $\boldsymbol{A}$ darstellen. Es ist dann

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{13}$$

Zusammen mit (1b) folgt dann

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{14}$$

Das Feld $\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ ist also wirbelfrei und kann daher in der Form

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{15}$$

als Gradient eines skalaren Potenzials φ dargestellt werden. Die elektrische Feldstärke ergibt sich also aus den Potenzialen $\boldsymbol{A}$ und φ über

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{16}$$

Mit (13) und (16) nehmen die Wellengleichungen (11) die Form

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \mu_0\boldsymbol{J} \tag{17a}$$

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{17b}$$

an. Wählt man Lösungen so, dass die *Lorenz-Bedingung*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

erfüllt ist, dann sind diese Gleichungen entkoppelt und nehmen die deutlich einfachere Form

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} - \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\boldsymbol{J} && \text{(19a)}\\ \nabla^2\varphi - \varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(19b)}\end{aligned}}$$

an. Es stellt sich heraus, dass die Gleichungen (19) tatsächlich Lösungen besitzen, welche der Lorenz-Bedingung (18) genügen. Im Frequenzbereich lautet die Lorenz-Bedingung

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\mu_0\varphi = 0 \tag{20}$$

und die Wellengleichungen für die dynamischen Potenziale haben die Form

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \boldsymbol{A} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{A} = (\nabla^2 + {k_0}^2)\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \\ &\nabla^2 \varphi + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varphi = (\nabla^2 + {k_0}^2)\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(21a) \\ &(21b) \end{aligned}$$

mit dem Quadrat der Wellenzahl ${k_0}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$.

Anmerkung 3 Die Wellenzahl ist eine Eigenschaft des Mediums, mit dem das Lösungsgebiet erfüllt ist. Für Vakuum ergibt sich $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Bei weiterer Untersuchung stellt sich heraus, dass die Wellenzahl in einem beliebigen Medium durch

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \mu_0 \mu_\mathrm{r}}$$

gegeben ist. Es stellt sich ferner heraus, dass Wirkverluste durch Leitfähigkeit und elektrische und magnetische Polarisationsverluste *im Frequenzbereich* adäquat und widerspruchsfrei durch komplexe Materialkonstanten

$$\varepsilon_\mathrm{r} = {\varepsilon_\mathrm{r}}' - \mathrm{j}{\varepsilon_\mathrm{r}}'' = |\varepsilon_\mathrm{r}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_\varepsilon}$$

$$\mu_\mathrm{r} = {\mu_\mathrm{r}}' - \mathrm{j}{\mu_\mathrm{r}}'' = |\mu_\mathrm{r}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_\mu}$$

mit ${\varepsilon_\mathrm{r}}'' \geq 0$ und ${\mu_\mathrm{r}}'' \geq 0$ beschrieben werden können. Dabei bezeichnet man $\delta_\varepsilon = \arctan({\varepsilon_\mathrm{r}}''/{\varepsilon_\mathrm{r}}')$ als den dielektrischen Verlustwinkel und $\delta_\mu = \arctan({\mu_\mathrm{r}}''/{\mu_\mathrm{r}}')$ als den magnetischen Verlustwinkel. In der Folge ergibt sich eine komplexe Wellenzahl

$$k = k' - \mathrm{j}k'' = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \mu_0 \mu_\mathrm{r}} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{({\varepsilon_\mathrm{r}}' - \mathrm{j}{\varepsilon_\mathrm{r}}'')({\mu_\mathrm{r}}' - \mathrm{j}{\mu_\mathrm{r}}'')}$$

mit

$$k' = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{|\varepsilon_\mathrm{r}||\mu_\mathrm{r}|}\cos\left(\frac{\delta_\varepsilon + \delta_\mu}{2}\right)$$

$$k'' = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{|\varepsilon_\mathrm{r}||\mu_\mathrm{r}|}\sin\left(\frac{\delta_\varepsilon + \delta_\mu}{2}\right).$$

Der aufgrund von $\delta_\varepsilon \neq 0$ und/oder $\delta_\mu \neq 0$ auftretende Imaginärteil $-k''$ beschreibt nun die exponentielle Bedämpfung ebener Wellen aufgrund der Verlustmechanismen des Mediums (siehe dazu auch Anmerkung 4 auf Seite 11).

2.2 Hertzscher Vektor

Wenn man die dynamischen Potenziale $\boldsymbol{A}$ und φ über

$$\boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial t} \tag{22a}$$

$$\varphi = -\operatorname{div} \boldsymbol{\pi} \tag{22b}$$

von einem Vektor $\boldsymbol{\pi}$ (Hertzscher Vektor) ableitet, dann erfüllen sie von vornherein die Lorenz-Bedingung. In dielektrischen Materialien hängen Stromdichte und Raumladungsdichte über

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{23a}$$

$$\rho = -\operatorname{div} \boldsymbol{P} \tag{23b}$$

mit der dielektrischen Polarisation $\boldsymbol{P}$ zusammen. Damit ergibt sich für den Hertzschen Vektor die *Wellendifferenzialgleichung*

$$\nabla^2 \boldsymbol{\pi} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\pi}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}, \tag{24}$$

welche im Frequenzbereich

$$(\nabla^2 + k_0{}^2)\boldsymbol{\pi} = -\frac{\boldsymbol{J}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0} \tag{25}$$

lautet. Im quellenfreien Raum ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$) wird daraus die homogene *Helmholtz-Gleichung*

$$(\nabla^2 + k_0{}^2)\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}. \tag{26}$$

3 Wellentypen

Die folgenden Betrachtungen finden ausschließlich im Frequenzbereich statt, gründen also auf den Maxwellschen Gleichungen in der Form (12).

3.1 TE-Wellen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit suchen wir Lösungen der Wellengleichungen im quellenfreien Raum, die keine y-Abhängigkeit besitzen ($\partial/\partial y = 0$ für alle Feldkomponenten). TE-Wellen bestehen ausschließlich aus den Komponenten E_y, H_x und H_z. Der Name TE (transversal elektrisch) rührt daher, dass das elektrische Feld nur eine transversale Komponente hat. Die transversale elektrische Feldkomponente E_y gehorcht der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_y = 0. \tag{27}$$

Die Komponenten des magnetischen Feldes folgen aus E_y über

$$H_x = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{28a}$$

$$H_z = \mathrm{j}\frac{1}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}. \tag{28b}$$

3.2 TM-Wellen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit suchen wir Lösungen der Wellengleichungen im quellenfreien Raum, die keine y-Abhängigkeit besitzen ($\partial/\partial y = 0$ für alle Feldkomponenten). TM-Wellen bestehen ausschließlich aus den Komponenten H_y, E_x und E_z. Der Name TM (transversal magnetisch) rührt daher, dass das magnetische Feld nur eine transversale Komponente hat. Die transversale magnetische Feldkomponente H_y gehorcht der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_y = 0. \tag{29}$$

Die Komponenten des elektrischen Feldes folgen aus H_y über

$$E_x = \mathrm{j}\frac{1}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{30a}$$

$$E_z = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{30b}$$

3.3 Komplexe Wellen

Stellvertretend für eine beliebige Komponente des elektromagnetischen Feldes betrachten wir die Eigenschaften einer zweidimensionalen skalaren Funktion $u(x,z)$, die keine Abhängigkeit von der y-Koordinate besitze. Sie gehorche der zweidimensionalen Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) u(x,z) = 0, \tag{31}$$

und besitzt daher die Form

$$u(x,z) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x - \mathrm{j}k_z z} \tag{32}$$

mit

$$k_x{}^2 + k_z{}^2 = k^2. \tag{33}$$

Die Wellenzahlen k_x und k_z können im Allgemeinen komplex sein, also

$$k_x = k_x' - \mathrm{j}k_x'' \qquad\qquad k_z = k_z' - \mathrm{j}k_z''.$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile in (33) folgen die Bedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 &= k^2 \qquad (34a) \\ k_x'k_x'' + k_z'k_z'' &= 0, \qquad (34b) \end{aligned}}$$

wobei das Medium als verlustfrei angenommen wird, also $\mathrm{Im}\{k\} = 0$. Die Funktion (32) lässt sich auch in der Form

$$u(x,z) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x'x + k_z'z) - (k_x''x + k_z''z)} = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{32'}$$

mit den Vektoren

$$\boldsymbol{r} = x \cdot \boldsymbol{e}_x + z \cdot \boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{k} = k_x' \cdot \boldsymbol{e}_x + k_z' \cdot \boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{\alpha} = k_x'' \cdot \boldsymbol{e}_x + k_z'' \cdot \boldsymbol{e}_z.$$

notieren. Die Ebenen konstanter Phase sind beschrieben durch $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{const}$ und die Ebenen konstanter Amplitude sind beschrieben durch $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{const}$. Daraus folgt auch, dass die Ebenen konstanter Phase senkrecht zu $\boldsymbol{k}$ und die Ebenen konstanter Amplitude senkrecht zu $\boldsymbol{\alpha}$ sind. In einem verlustfreien Medium gilt mit der Bedingung (34b)

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha} = k_x'k_x'' + k_z'k_z'' = 0,$$

das heißt, in einem verlustfreien Medium stehen die Ebenen konstanter Phase auch senkrecht auf den Ebenen konstanter Amplitude.

Weil Dämpfungs- und Phasenkonstanten in x- und z-Richtung über die Bedingungen (34) zusammenhängen, lassen sich verschiedene Typen komplexer Wellen klassifizieren. Breitet sich beispielsweise eine Welle in z-Richtung mit verlangsamter Phasengeschwindigkeit ($k_z' > k$) und ohne Verluste ($k_z'' = 0$) aus, dann muss wegen

$$k_x{}^2 = k^2 - k_z{}^2 < 0$$

die Wellenzahl k_x rein imaginär ($k_x = -\mathrm{j}k_x''$) sein, wobei zusätzlich $k_x'' = \sqrt{(k_z')^2 - k^2}$ gilt. Eine derartige Welle ist also in x-Richtung reaktiv bedämpft und zwar umso stärker, je stärker sie verzögert ist (engl. slow wave). Komplexe Wellen bilden auch die Grundlage zur Beschreibung verschiedener Arten von Oberflächenwellen, die sich entlang von Grenzflächen zwischen verschiedenartigen Medien ausbreiten.

Anmerkung 4 Zur Notation der Ausbreitungseigenschaften einer elektromagnetischen Welle existieren zwei Konventionen, auf die zur Vermeidung von Verwechslungen kurz hingewiesen sei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei z die Ausbreitungsrichtung einer Welle. Die Änderung ihres Amplituden- und Phasenzustandes in Ausbreitungsrichtung wird beschrieben durch das *Dämpfungsmaß* α (in $^1/_\mathrm{m}$) und das *Phasenmaß* β (in $^\mathrm{rad}/_\mathrm{m}$). Der Zustand der elektromagnetischen Welle variiert dann in z-Richtung mit exponentieller Abhängigkeit gemäß

$$u(z) = u_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}. \tag{35}$$

Zur kompakten Notation der Exponentialterme schreibt man (35) entweder in der Form

$$u(z) = u_0\,\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{36}$$

mit dem komplexen *Ausbreitungsmaß* γ oder in der Form

$$u(z) = u_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{37}$$

mit der komplexen *Wellenzahl* k. Durch Vergleich mit (35) wird klar, dass damit den Real- und Imaginärteilen von Ausbreitungsmaß γ und Wellenzahl k unterschiedliche Bedeutungen bezüglich Amplituden- und Phasenänderung zukommen, denn es ist

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}k \qquad \text{und} \qquad k = \beta - \mathrm{j}\alpha = -\mathrm{j}\gamma$$

oder umgekehrt

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\gamma\} = -\mathrm{Im}\{k\} \qquad \text{und} \qquad \beta = \mathrm{Im}\{\gamma\} = \mathrm{Re}\{k\}.$$

Tabelle 1: Verschiedene Formen der Maxwellschen Gleichungen. Aus Platzgründen wurde hier auf die explizite Angabe der Abhängigkeiten von $\boldsymbol{r}$ und/oder t sowie auf die Kennzeichnung der Dimensionalität durch Mehrfachintegrale verzichtet.

		Zeitbereich		Frequenzbereich	
		Integralform	Differenzialform	Integralform	Differenzialform
allgemein	$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\mathrm{f} + \boldsymbol{J}_\mathrm{mag} + \boldsymbol{J}_\mathrm{pol}$ $\rho = \rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{pol}$	$\int_{\partial A} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \left(\int_A \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} \right)$ $-\int_{\partial A} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\,\mathrm{d}V$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$ $-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int_{\partial A} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 \left(\int_A \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} \right)$ $-\int_{\partial A} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{j}\omega \int_A \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\,\mathrm{d}V$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E})$ $-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
mit Materialgrößen	$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\mathrm{f}$ $\rho = \rho_\mathrm{f}$ $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_\mathrm{r} \boldsymbol{H}$	$\int_{\partial A} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_A \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $-\int_{\partial A} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ $-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$	$\int_{\partial A} \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \mathrm{j}\omega \int_A \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $-\int_{\partial A} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{j}\omega \int_A \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$ $\int_{\partial V} \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V$	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$ $-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
E_x, E_y, E_z	$\mathrm{V/m}$	Komponenten der elektrischen Feldstärke (kartesisch)
H_x, H_y, H_z	$\mathrm{A/m}$	Komponenten der magnetischen Feldstärke (kartesisch)
c_0	$\mathrm{m/s}$	Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
$\mathrm{d}V$	m^3	infinitesimales Volumenelement
k'	$\mathrm{1/m}$	Realteil der Wellenzahl (Phasenmaß)
k''	$\mathrm{1/m}$	negativer Imaginärteil der Wellenzahl (Dämpfungsmaß)
k_0	$\mathrm{rad/m}$	Wellenzahl im Vakuum
k_x, k_y, k_z	$\mathrm{1/m}$	Wellenzahlen in x-, y-, und z-Richtung
q	As	Ladung
t	s	Zeit
ε_0	$\mathrm{As/Vm}$	Vakuum-Permittivität
ε_r	1	relative Permittivität
μ_0	$\mathrm{Vs/Am}$	Vakuum-Permeabilität
μ_r	1	relative Permeabilität
ρ	$\mathrm{As/m^3}$	Raumladungsdichte
σ	$\mathrm{As/m^2}$	Flächenladungsdichte
φ	V	skalares Potenzial
χ_e	1	elektrische Suszeptibilität
χ_m	1	magnetische Suszeptibilität
ω	$\mathrm{rad/s}$	Kreisfrequenz
		– Vektorgrößen –
$\boldsymbol{A}$	$\mathrm{Vs/m}$	Vektorpotenzial
$\boldsymbol{B}$	$\mathrm{Vs/m^2}$	Vektor der magnetischen Flussdichte
$\boldsymbol{D}$	$\mathrm{As/m^2}$	Vektor der elektrischen Verschiebungsdichte
$\boldsymbol{E}$	$\mathrm{V/m}$	Vektor der elektrischen Feldstärke
$\boldsymbol{H}$	$\mathrm{A/m}$	Vektor der magnetischen Feldstärke
$\boldsymbol{J}$	$\mathrm{A/m^2}$	Vektor der Stromdichte
$\boldsymbol{K}$	$\mathrm{A/m}$	Vektor der Flächenstromdichte
$\boldsymbol{M}$	$\mathrm{A/m}$	Vektor der magnetischen Polarisation
$\boldsymbol{P}$	$\mathrm{As/m^2}$	Vektor der elektrischen Polarisation
$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$	m^2	vektorielles infinitesimales Flächenelement
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	m	vektorielles infinitesimales Wegelement
$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$	1	Koordinateneinheitsvektoren (kartesisch)
$\boldsymbol{k}$	$\mathrm{1/m}$	Wellenvektor
$\boldsymbol{n}$	1	Normaleneinheitsvektor
$\boldsymbol{r}$	m	Ortsvektor
$\boldsymbol{v}$	$\mathrm{m/s}$	Geschwindigkeitsvektor
$\boldsymbol{\pi}$	Vm	Hertzscher Vektor
		– Zahlen –
e	1	Eulersche Zahl $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
j	1	imaginäre Einheit ($\mathrm{j}^2 = -1$)

Literatur

[1] Balanis, C. A.: *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[2] Collin, R. E.: *Antennas and Radiowave Propagation*. McGraw-Hill, New York, 1985.

[3] Collin, R. E.: *Foundations for Microwave Engineering*. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Wiley & Sons, Hoboken, 2nd edition, 2001.

[4] Hill, D. A.: *Electromagnetic Fields in Cavities. Deterministic and Statistical Theories*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2009.

[5] Ishimaru, A.: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

[6] Kark, K.: *Antennen und Strahlungsfelder*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 3. Auflage, 2010.

[7] Kröger, R. und R. Unbehauen: *Elektrodynamik*. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1993.

[8] Orfanidis, S. J.: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, 2010. http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa.

[9] Rothwell, E. J. and M. J. Cloud: *Electromagnetics*. CRC Press, Boca Raton, 2001.

[10] Simonyi, K.: *Theoretische Elektrotechnik*. Barth, Edition Dt. Verlag der Wissenschaften, Leipzig, 10. Auflage, 1993.

[11] Van Bladel, J.: *Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2nd edition, 2007.