

Lineare Mehrtorschaltungen

URL: <http://www.suart.de/lehre/mehrtore.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

26. Juni 2010 (Version 0.10)

Zusammenfassung

Dieses Dokument befindet sich im Entwurf und ist daher noch unvollständig.

Inhaltsverzeichnis

1. Tordefinition	2
1.1. Betriebszustand von Toren	2
1.2. Torgrößen	3
2. Charakterisierung von linearen Mehrtoren	5
3. Schaltungen aus linearen Mehrtoren	6
3.1. Kettenschaltung von Zweitoren	6
3.2. Abschluss mit einem Eintor	6
3.3. Ersatzwellenquelle	6

1. Tordefinition

1.1. Betriebszustand von Toren

Ein Klemmenpaar eines Netzwerkes bezeichnet man als Tor, wenn ein ganz bestimmter Betriebszustand vorliegt und durch die Beschaltung sichergestellt ist. Die Definition dieses Betriebszustandes gründet auf der Tatsache, dass eine beliebige Funktion $F(x)$ stets in einen geraden Anteil $G(x)$ und einen ungeraden Anteil $U(x)$ gemäß

$$G(x) = \frac{1}{2}(F(x) + F(-x)) \tag{1a}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(-x)) \tag{1b}$$

zerlegt werden kann. Es ist unschwer zu erkennen, dass mit dieser Zerlegung

$$G(-x) = G(x) \qquad U(-x) = -U(x)$$

sowie

$$F(x) = G(x) + U(x)$$

gelten. In ähnlicher Weise können die Ströme I_1 und I_2 in einer Doppelleitung (beziehungsweise in einem Klemmenpaar) in einen Gleichtakt- und einen Gegentaktanteil zerlegt werden. Verwendet man

$$I_G = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \tag{2a}$$

$$I_U = \frac{1}{2}(I_1 - I_2), \tag{2b}$$

dann beschreibt I_G einen Strom, der identisch in beiden Leitern fließt und I_U einen Strom, der in beiden Leitern mit entgegengesetztem Vorzeichen fließt (Abb. 1). Die Gesamtstromverteilung setzt sich offensichtlich aus diesen beiden Anteilen gemäß

$$I_1 = I_G + I_U \tag{3a}$$

$$I_2 = I_G - I_U \tag{3b}$$

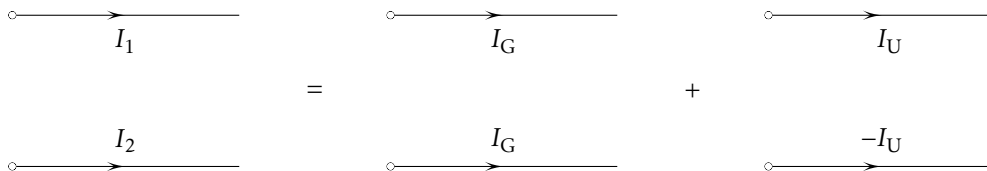


Abb. 1: Zur Zerlegung der Ströme in einer Doppelleitung in Gleichtakt- und Gegentaktanteil

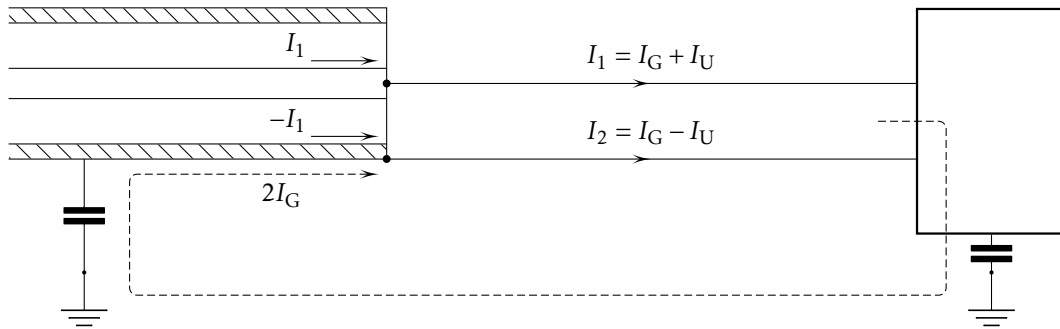


Abb. 2: Zur Anregung von Gleichtaktsignalen beim Übergang von unsymmetrischen auf symmetrische Leitungen

zusammen. Entsprechend ihrer Eigenschaften bezeichnet man den geraden Anteil I_G als *Gleichtaktanteil* (engl. *even mode*, *common mode* oder *unbalanced mode*) und den ungeraden Anteil I_U als *Gegentaktanteil* (engl. *odd mode*, *differential mode* oder *balanced mode*).

Insbesondere beim Übergang von unsymmetrischen auf symmetrische Leitungen kommt der Anregung von Gleich- und Gegenteilströmen eine besondere Bedeutung zu. Zur Einhaltung der Torbedingung ist hier darauf zu achten, dass möglichst nur ein Gegenteilssignal angeregt wird, da ein zusätzliches Gleichtaktssignal die Impedanzverhältnisse in undefinierter Weise verändern kann. Als Beispiel für einen solchen Übergang ist in Abb. 2 der direkte Übergang zwischen einer Koaxialleitung (unsymmetrisch) und einer Zweidrahtleitung (symmetrisch) dargestellt. Werden keine Maßnahmen zur Unterdrückung des Gleichtaktstromes I_G getroffen, so kann dieser über die Kapazitäten oder gegebenenfalls auch galvanischen Verbindungen zwischen Verbraucher, Koaxialaußenleiter und Erde fließen. Im Fall der Speisung einer symmetrischen Antenne kann dieser Gleichtaktanteil, der sich in Form einer Mantelwelle zwischen Koaxialkabel und Erde ausbreitet, zu unerwünschten Abstrahlungen und damit zu einer Veränderung der Antennencharakteristik führen. Schaltungselemente oder Strukturen zur Unterdrückung des Gleichtaktstromes bei derartigen Übergängen bezeichnet man als *Balun* (engl. *balanced-unbalanced*).

1.2. Torgrößen

Zur Betrachtung von Mehrtorschaltungen in der Hochfrequenztechnik ist es zweckmäßig, die Torspannung U und den Torstrom I aufzufassen als das Ergebnis der Überlagerung einer in das hineinlaufenden Welle mit der Spannung U_h und dem Strom $I_h = U_h/Z_0$ und einer aus dem Tor herauslaufenden Welle mit der Spannung U_r und dem Strom $I_r = U_r/Z_0$. Die Impedanz Z_0 ist dabei der beiden Wellen gemeinsame Wel-

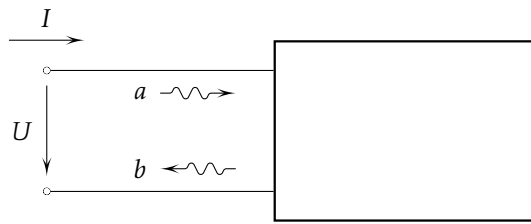


Abb. 3: Zur Einführung von Torspannung, Torstrom und den zugehörigen Wellengrößen

lenwiderstand. Mit dieser Zerlegung ergibt sich

$$U = U_h + U_r \quad (4a)$$

$$I = I_h - I_r = \frac{U_h}{Z_0} - \frac{U_r}{Z_0}. \quad (4b)$$

Durch

$$a = \frac{U + IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_h}{\sqrt{Z_0}} = I_h \sqrt{Z_0} \quad (5a)$$

$$b = \frac{U - IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_r}{\sqrt{Z_0}} = I_r \sqrt{Z_0} \quad (5b)$$

werden die Wellengrößen a und b definiert, welche in normierter Form die hineinlaufende und die herauslaufende Welle beschreiben. Aus den Wellengrößen ergeben sich Torspannung und Torstrom über

$$U = \sqrt{Z_0} \cdot (a + b) \quad (6a)$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \cdot (a - b) \quad (6b)$$

auf eindeutige Weise (Abb. 3). Durch eine Normierung der Torgrößen U und I auf $\sqrt{Z_0}$ ähnlich zu (5) erhält man die normierten Größen

$$u = \frac{U}{\sqrt{Z_0}} = a + b \quad (7a)$$

$$i = I\sqrt{Z_0} = a - b \quad (7b)$$

und in Umkehrung dieser Beziehungen

$$a = \frac{1}{2}(u + i) \quad (8a)$$

$$b = \frac{1}{2}(u - i). \quad (8b)$$

Wir bemerken an dieser Stelle die starke Analogie zur Zerlegung der Leitungsströme in Gleichtakt und Gegentakt.

2. Charakterisierung von linearen Mehrtores

Zur Charakterisierung der Netzwerkeigenschaften von linearen N -Toren mit fassen wir die Torgrößen in Spaltenvektoren zusammen und führen den Spannungsvektor $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)^T$, den Stromvektor $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)^T$, den Vektor der hineinlaufenden Wellengrößen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)^T$ sowie den Vektor der herauslaufenden Wellengrößen $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T$ ein. Der normierte Spannungs- und Stromvektor ergibt sich dann durch

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (9a)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \quad (9b)$$

Bekanntlich kann ein lineares Mehrtor durch seine Impedanzmatrix \mathbf{Z} beziehungsweise durch seine Admittanzmatrix \mathbf{Y} charakterisiert werden, wobei

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (10a)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U}. \quad (10b)$$

gilt. Diese Beziehungen lassen sich unmittelbar auf die normierten Größen übertragen, sodass

$$\mathbf{u} = \mathbf{z}\mathbf{i} \quad (11a)$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\mathbf{u}. \quad (11b)$$

mit den normierten Matrizen $\mathbf{z} = \mathbf{Z}/Z_0$ und $\mathbf{y} = Z_0\mathbf{Y}$ gilt. Wegen der linearen Abbildungsbeziehung zwischen Spannung und Strom und den korrespondierenden Wellengrößen besteht ebenfalls eine lineare Beziehung zwischen den Wellengrößen eines linearen Mehrtores, welche beispielsweise in der Form

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a} \quad (12)$$

mit der Streumatrix \mathbf{S} geschrieben werden kann. Durch Einsetzen bestätigt man leicht, dass die Umrechnung zwischen Impedanz-, Admittanz- und Streumatrix durch

$$\mathbf{z} = (\mathbf{E} - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{S}) \quad (13a)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{E} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{S}) \quad (13b)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{z} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{E}) \quad (13c)$$

$$-\mathbf{S} = (\mathbf{y} + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{E}) \quad (13d)$$

mit der $N \times N$ -Einheitsmatrix \mathbf{E} gegeben ist [1].

3. Schaltungen aus linearen Mehrtores

3.1. Kettenschaltung von Zweitoren

3.2. Abschluss mit einem Eintor

3.3. Ersatzwellenquelle

Literatur

- [1] BRAND, H.: *Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze*. Stuttgart : Hirzel-Verlag, 1970
- [2] DETLEFSEN, J. ; SIART, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 3. Aufl. München : Oldenbourg, 2009
- [3] SCHÜSSLER, H. W.: *Netzwerke, Signale und Systeme*. Bd. 1: *Systemtheorie linearer elektrischer Netzwerke*. 2. Aufl. Berlin : Springer, 1990
- [4] ZINKE, O. ; BRUNSWIG, H. ; VLCEK, A. (Hrsg.): *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik*. Bd. 1. 4. Aufl. Berlin : Springer, 1990

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
a	\sqrt{W}	Wellengröße der vorlaufenden Welle
b	\sqrt{W}	Wellengröße der rücklaufenden (reflektierten) Welle
r	1	Reflexionsfaktor
S	1	Streumatrix
Z	Ω	Impedanzmatrix
Y	S	Admittanzmatrix
z	1	normierte Impedanzmatrix
y	1	normierte Admittanzmatrix
P	W	Leistung
P_1	W	Eingangsleistung
P_2	W	Ausgangsleistung
R	Ω	Widerstand
R_1	Ω	Eingangswiderstand
R_2	Ω	Ausgangswiderstand
U	V	Spannung
Z_L	Ω	Leitungswellenwiderstand
λ	m	Wellenlänge
λ_0	m	Wellenlänge im Vakuum
ω	rad/s	Kreisfrequenz
c_0	m/s	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
f	1/s	Frequenz
t	s	Zeit