

Phasenrauschen in Oszillatoren und Sensorsystemen

URL: <http://www.siart.de/lehre/phasenrauschen.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

26. Juni 2010 (Version 0.14)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
2. Phasenschwankungen und spektrale Leistungsdichte	2
3. Phasenrauschen bei laufzeitabhängiger Kohärenz	4
4. Phasenrauschen beim FMCW-Radar mit linearer FM	5

1. Einführung

Bedingt durch unvermeidliche und allgegenwärtige Rauschprozesse mit verschiedenen Ursachen und Eigenschaften folgt das Ausgangssignal eines Oszillators bei genauer Betrachtung nicht exakt einem harmonischen Verlauf gemäß

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

sondern es weisen sowohl die Amplitude U_0 wie auch die Phase φ_0 statistische Schwankungen auf. Sie entstehen durch Rauschprozesse, welche die Oszillation unmittelbar beeinflussen und solche, die durch die Nichtlinearität der Oszillatorbauelemente spektral verschoben werden und dadurch spektrale Beiträge in der Umgebung von ω_0 verursachen. Bei der Spezifikation der Oszillatorstabilität unterscheidet man zwischen der *Langzeitstabilität* und der *Kurzzeitstabilität*. Ursachen für langfristige Schwankungen sind zum Beispiel Alterungsprozesse oder durch Temperaturschwankungen verursachte Drift von Bauelementeeigenschaften. Die Langzeitstabilität wird durch die relative Frequenzabweichung innerhalb eines längeren Zeitraums spezifiziert, beispielsweise in $\pm 10^{-6}/\text{Tag}$. Die Kurzzeitstabilität wird durch momentane Fluktuationen von Amplitude und

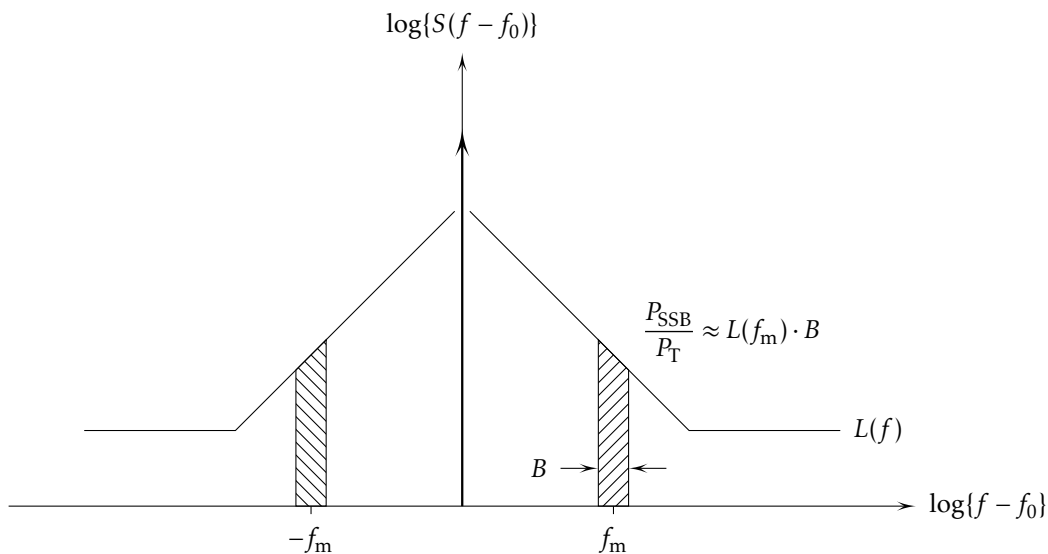


Abb. 1: Schematisierte Darstellung der spektralen Leistungsdichte in der Umgebung von f_0 (Anm.: Die Frequenz $f = 0$ ist auf der logarithmierten Frequenzachse nicht darstellbar, die auftretende Spektrallinie ist hier zur Repräsentation der Oszillatorleistung aber dennoch eingezeichnet.)

Phase beschrieben. Man spricht vom *Amplitudenrauschen* und vom *Phasenrauschen*, welche als eine Modulation dieser beiden Größen durch ein Rauschsignal interpretiert werden können. Durch diese Modulation entstehen zu beiden Seiten der Mittenfrequenz ω_0 so genannte *Rauschseitenbänder*, sodass die Bandbreite des Oszillatorsignals nicht wie im idealen Fall verschwindet sondern eine gewisse endliche Größe aufweist. Die Intensität der Schwankungen wird üblicherweise durch Angabe der relativen Einseitenbandleistung in 1 Hz Bandbreite als Funktion der Ablage von ω_0 spezifiziert (Abb. 1).

Für Kommunikations- und Sensorsysteme spielt meist nur das Phasenrauschen eine Rolle, da die spektrale Leistungsdichte des Amplitudenrauschens einer Tiefpasscharakteristik folgt [17] und daher zumindest in unmittelbarer Umgebung von ω_0 gegen die Leistungsdichte des Phasenrauschens vernachlässigt werden kann. Die dominierenden Konsequenzen des Phasenrauschens sind eine Verringerung der Empfindlichkeit von Empfängern durch Überdeckung von Signalen kleiner Leistung, zusätzliches Hintergrundrauschen in Doppler-Radarsystemen und Symbolfehler bei der Demodulation digitaler Kommunikationssignale.

2. Phasenschwankungen und spektrale Leistungsdichte

Vernachlässigt man die Amplitudenschwankungen und betrachtet zur Näherung nur die Phasenschwankungen $\Delta\Phi(t)$ eines Oszillators, dann lautet sein Zeitsignal

$$u(t) = U_0 \cos\{\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Phi(t)\}. \quad (2)$$

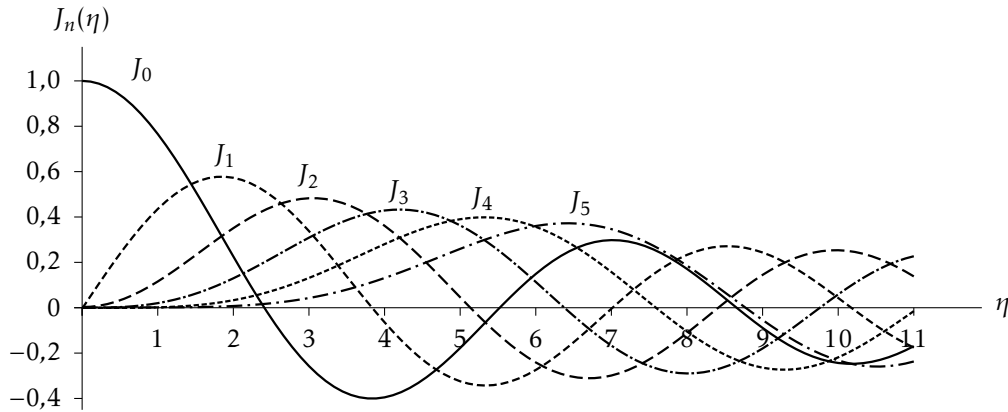


Abb. 2: Verlauf der Besselfunktionen $J_n(\eta)$

Zur Abschätzung des Zusammenhangs zwischen der Leistung von Phasenschwankungen und der dadurch entstehenden Einseitenbandleistung wird zur Vereinfachung eine sinusförmige Phasenschwankung angenommen. Mit der Schwankungsfrequenz f_m und der Schwankungsamplitude $\Delta\Phi_{\max}$ ergeben sich die Beziehungen

$$\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi_{\max} \cdot \sin(\omega_m t + \varphi) \quad (3)$$

für die momentane Phasenabweichung sowie die momentane Frequenzabweichung über den Zusammenhang $\Delta\omega(t) = d\Delta\Phi(t)/dt$

$$\Delta f(t) = f_m \Delta\Phi_{\max} \cdot \cos(\omega_m t + \varphi) = \Delta f_{\max} \cdot \cos(\omega_m t + \varphi) \quad (4)$$

mit

$$\Delta\Phi_{\max} = \eta = \frac{\Delta f_{\max}}{f_m}. \quad (5)$$

Dabei ist η der Modulationsindex oder Modulationsgrad der Frequenzmodulation. Das Spektrum des frequenzmodulierten Oszillatorsignals hat unendlich viele einzelne Spektrallinien und kann in der Form

$$u(t) = U_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j((\omega_0 + n\omega_m)t + n\varphi + \varphi_0)} \right\} \quad (6)$$

dargestellt werden. Die dabei auftretenden Besselfunktionen als Funktion des Modulationsgrads η sind in Abb. 2 dargestellt.

Bei den hier vorkommenden kleinen Modulationsgraden können Seitenbänder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Mit den Näherungen für die Besselfunktionen $J_0(\eta)$ und $J_1(\eta)$

$$J_0 \approx 1 \qquad J_1 \approx \eta/2$$

für $\eta \ll 1$ ergibt sich

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\eta}{2} U_0 \cos((\omega_0 + \omega_m)t + \varphi + \varphi_0) - \frac{\eta}{2} U_0 \cos((\omega_0 - \omega_m)t - \varphi + \varphi_0) \quad (7)$$

und damit eine auf die Gesamtoszillatorleistung P_C (engl.: carrier) bezogene Seitenbandleistung P_{SSB} (engl.: single side band) von

$$\frac{P_{SSB}}{P_C} = \frac{\eta^2}{4} = \frac{\Delta\Phi_{\max}^2}{4} = \frac{\Delta\Phi_{\text{eff}}^2}{2}. \quad (8)$$

Das Phasenrauschen von Oszillatoren wird durch die spektrale Leistungsdichte $L(f_m)$ beschrieben. Für die Umrechnung gilt bei Betrachtung der Bandbreite B

$$\frac{P_{SSB}}{P_C} = L(f_m) \cdot B. \quad (9)$$

Ein typischer Wert ist zum Beispiel $L(1\text{MHz}) = -90\text{dBc/Hz}$. Für den Effektivwert der Phasenschwankungen ergibt sich

$$\Delta\Phi_{\text{eff}}^2 = 2 \frac{P_{SSB}}{P_C} = 2L(f_m) \cdot B. \quad (10)$$

Die Frequenzschwankungen berechnen sich aus

$$\Delta f_{\text{eff}}^2 = 2f_m^2 \cdot \frac{P_{SSB}}{P_C} = 2f_m^2 L(f_m) \cdot B. \quad (11)$$

3. Phasenrauschen bei laufzeitabhängiger Kohärenz

Bei Radaranwendungen entsteht das Empfangssignal zum Zeitpunkt t durch Mischung des im Augenblick t gesendeten Oszillatorsignals mit dem vor der Laufzeit τ zum Zeitpunkt $t - \tau$ gesendeten Signal. Die Phasenrauschanteile in Sende- und Empfangssignal sind daher teilweise korreliert. Ein Phasenrauschanteil des Sendeoszillators, der bei der Ablagefrequenz f_m durch den Phasenhub η gekennzeichnet ist, führt bei Mischung zwischen gesendetem und dem empfangenen Signal im Empfänger zu einem Mischprodukt mit reduziertem Phasenrauschen. Bei Frequenzumsetzung auf eine Zwischenfrequenz ergibt sich:

$$u_{ZF}(t) = U_{ZF} \cdot \cos(\omega_{ZF}t + \Delta\Phi(t - \tau) - \Delta\Phi(t)) \quad (12)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t - \tau) - \Delta\Phi(t) &= \eta \left(\sin(\omega_m(t - \tau) + \varphi) - \sin(\omega_m t + \varphi) \right) \\ &= -2\eta \cos(\omega_m t + \varphi - \pi f_m \tau) \sin(\pi f_m \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Durch die Verwendung gleicher aber zeitlich verzögerter Signale zum Senden und Empfangen sind die Signale bei kleinen Laufzeiten kohärent. Der sich ergebende Phasenhub η_{ZF} des Zwischenfrequenzsignals reduziert sich daher laufzeitabhängig auf

$$\eta_{ZF} = 2\eta |\sin(\pi f_m \tau)|. \quad (14)$$

Die wirksame Seitenbandleistung bei Signalauswertung in der Bandbreite B liegt dann bei

$$\frac{P_{SSB}}{P_C} = L(f_m) \cdot B \cdot 4 \sin^2(\pi f_m \tau). \quad (15)$$

4. Phasenrauschen beim FMCW-Radar mit linearer FM

Das Oszillatorsignal eines mit dem Frequenzhub ΔF und der Periode T linear frequenzmodulierten Sendeoszillators enthält bei Berücksichtigung des Phasenrauschens einen zusätzlichen Anteil, der zur Vereinfachung wieder als sinusförmig angenommen werde und durch die maximale Frequenzabweichung Δf_{\max} gekennzeichnet sei. Der Verlauf der Momentanfrequenz des Sendesignals ergibt sich damit zu

$$f_S(t) = f_0 + \frac{\Delta F}{T} \cdot t + \Delta f_{\max} \cos(\omega_m t + \varphi) \quad (16)$$

für $nT - T/2 < t < nT + T/2$. Für die Phase des Sendesignals erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= 2\pi \int_{-T/2}^t f_S(t') dt' = 2\pi \left[f_0 t' + \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{T} t'^2 + \frac{\Delta f_{\max}}{\omega_m} \sin(\omega_m t' + \varphi) \right]_{-T/2}^t \\ &= \omega_0 t + \pi \frac{\Delta F}{T} t^2 + \frac{\Delta f_{\max}}{f_m} \sin(\omega_m t + \varphi) + \varphi_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Das Empfangssignal in der Verarbeitungsebene entsteht durch Mischung des Sende- und des um die Laufzeit τ verzögerten Empfangssignals und ist gegeben durch

$$u_D(t) = U_D \cdot \cos(\varphi_S(t) - \varphi_E(t)) \quad (18)$$

mit $\varphi_E(t) = \varphi_S(t - \tau)$. Eine Fourieranalyse des (nicht amplitudenbewerteten) Empfangssignals für ein Objekt mit einer Laufzeit τ_0 führt auf eine spektrale Verteilung gemäß

$$I(f) = \frac{\sin(\pi \Delta F (\tau - \tau_0))}{\pi \Delta F (\tau - \tau_0)} e^{j\omega_0 (\tau - \tau_0)}. \quad (19)$$

Im Falle der Berücksichtigung des Phasenrauschens wird daraus

$$I(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(2\pi \Delta f_{\max} \tau_0) \frac{\sin(\pi \Delta F (\tau - \tau_0) + n\pi f_m T)}{\pi \Delta F (\tau - \tau_0) + n\pi f_m T} e^{j(\omega_0 (\tau - \tau_0) + n\varphi)}. \quad (20)$$

Für kleine Argumente der Besselfunktionen können die üblichen Näherungen verwendet werden. Es ergeben sich nur für $n = \pm 1$ durch das Phasenrauschen bedingte Nebenmaxima, die zu berücksichtigen sind, weil sie z. B. ein weiteres Ziel kleiner Amplitude überdecken könnten. Für den relativen Pegel erhält man mit

$$\Delta f_{\text{eff}}^2 = 2f_m^2 L(f_m)B \quad (21)$$

den Ausdruck

$$\frac{P_{\text{Nebenmaximum}}}{P_{\text{Ziel}}} = \left(\frac{J_1}{J_0}\right)^2 = (\pi \Delta f_{\text{max}} \tau_0)^2 = (\omega_m \tau_0)^2 L(f_m)B. \quad (22)$$

Literatur

- [1] AGILENT TECHNOLOGIES (Hrsg.): *Fundamentals of RF and Microwave Noise Figure Measurements*. Agilent Technologies, October 2000. – Application Note 57-1
- [2] AGILENT TECHNOLOGIES (Hrsg.): *Phase noise test with the Agilent 8644A and 8665A Signal Generators*. Agilent Technologies, September 2000. – Product Note 8644A-1
- [3] ANZILL, W.: *Berechnung und Optimierung des Phasenrauschens von Oszillatoren*, Technische Universität München, Dissertation, 1995
- [4] BAGHDADY, E. J. ; LINCOLN, R. N. ; NELIN, B. D.: Short-Term Frequency Stability: Characterization, Theory, and Measurement. In: *Proc. IEEE* (1965), July, S. 704–722
- [5] BARAN, O. ; KASAL, M.: Oscillator Phase Noise Models. In: *Radioelektronika, 18th International Conference*, 2008, S. 1–4
- [6] DETLEFSEN, J.: *Radartechnik*. Berlin : Springer, 1989 (Nachrichtentechnik 18)
- [7] EDSON, W. A.: Noise in Oscillators. In: *Proc. IRE* Vol. 48 (1960), S. 1454–1466
- [8] HAJIMIRI, A. ; LEE, T. H.: A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators. In: *IEEE J. Solid-State Circuits* JSSC-33 (1998), February, Nr. 2, S. 179–194
- [9] HAJIMIRI, A. ; LEE, T. H.: Corrections to »A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators«. In: *IEEE J. Solid-State Circuits* JSSC-33 (1998), June, Nr. 6, S. 928
- [10] KNÖCHEL, R. ; SCHÜNEMANN, K.: Noise in Multiple-Device Oscillators. In: *Archiv Elektronik und Übertragungstechnik* AEÜ-36 (1982), Nr. 10, S. 31–39
- [11] KÄRTNER, F. X.: Determination of the Correlation Spectrum of Oscillators with Low Noise. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* MTT-37 (1989), Nr. 1, S. 90–101
- [12] KÄRTNER, F. X.: Analysis of White and $f^{-\alpha}$ Noise in Oscillators. In: *Int. Journ. Circuit Theory Applicat.* 18 (1990), S. 485–519

- [13] LEE, T. H. ; HAJIMIRI, A.: Oscillator Phase Noise: A Tutorial. In: *IEEE J. Solid-State Circuits* JSSC-35 (2000), March, Nr. 3, S. 326–336
- [14] MÄRZ, K.: Phasen- und Amplitudenschwankungen in Oszillatoren. In: *Archiv Elektronik und Übertragungstechnik* AEÜ-24 (1970), Nr. 11, S. 477–490
- [15] RAVEN, R. S.: Requirements on Master Oscillators for Coherent Radar. In: *Proc. IEEE* 54 (1966), February, Nr. 2, S. 237–243
- [16] RAVEN, R. S.: Correction to »Requirements on Master Oscillators for Coherent Radar«. In: *Proc. IEEE* 55 (1967), August, Nr. 8, S. 1452
- [17] RUSSEK, P.: *Hochfrequenztechnik* 3. 1. Aufl. Technische Universität München: Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, 1989. – Skriptum zur Vorlesung
- [18] SCHIEK, B. ; SIWERIS, H.-J.: *Rauschen in Hochfrequenzschaltungen*. Heidelberg : Hüthig, 1990
- [19] SIWERIS, H. J. ; SCHIEK, B.: Analysis of Noise Upconversion in Microwave FET Oscillators. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* MTT-33 (1985), March, Nr. 3, S. 233–242

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
B	Hz	Bandbreite
J_n	1	Besselfunktion n -ter Ordnung
L	dB ζ /Hz	relative spektrale Leistungsdichte
P_C	W	Trägerleistung
P_{SSB}	W	Einseitenbandleistung
T	s	Modulationsperiode
U_0	V	Amplitude der Oszillatorspannung
ΔF	Hz	Frequenzhub
$\Delta\Phi$	rad	Phasenabweichung
η	1	Modulationsindex
ω_0	rad/s	Soll-Kreisfrequenz
ω_m	rad/s	Modulations-Kreisfrequenz
τ	s	Laufzeit
φ_0	rad	statische Phase
f_0	Hz	Soll-Frequenz
f_m	Hz	Modulationsfrequenz
t	s	Zeit
u	V	Oszillatorspannung