

– Tutorium –

# Hochauflösende Spektralschätzung und Prädiktionsverfahren

URL: <http://www.siar.de/lehre/spektralschaetzung.pdf>

Uwe Siart

*tutorien@siar.de*

28. Januar 2013 (Version 1.24)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Parameterschätzung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Klassische Spektralschätzung</b>	<b>6</b>
2.1	Autokorrelationsfolge (AKF) . . . . .	6
2.2	Korrelogramm . . . . .	8
2.3	Fensterung der AKF (Blackman-Tukey) . . . . .	9
2.4	Periodogramm (auch: direkte Methode) . . . . .	10
2.5	Mittelung von Periodogrammen (Bartlett) . . . . .	11
2.6	Mittelung von Periodogrammen mit Fensterung und Überlappung (Welch) . .	12
2.7	Kombination Periodogramm-Korrelogramm . . . . .	13
2.8	Maximum-Entropy-Spektrum . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Hochauflösende Schätzverfahren (parametrisch)</b>	<b>15</b>
3.1	Direkte Strukturen diskreter Filter . . . . .	15
3.2	Strukturen von AR-, MA- und ARMA-Modellsystemen . . . . .	17
3.3	Übertragungsfunktionen und Differenzgleichungen . . . . .	19
3.4	Bestimmung der AR-Parameter . . . . .	20
3.5	Kovarianzverfahren zur Vorwärtsprädiktion . . . . .	21

3.6	Das Prony-Verfahren . . . . .	23
3.7	Das ursprüngliche Prony-Verfahren . . . . .	29
3.8	Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren . . . . .	33
3.9	Spektrale Interpretation . . . . .	38
3.10	Vorgehen bei bekannten Frequenzen . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Hochauflösende Schätzverfahren (nichtparametrisch)</b>	<b>42</b>
4.1	Der MUSIC-Algorithmus . . . . .	42
4.2	Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR) . . . . .	46

# 1 Parameterschätzung

## Begriffe

- Unbekannte Parameter (dazu gehören zum Beispiel auch Abtastwerte der spektralen Leistungsdichte) können aus einer Messung (Beobachtung mit endlicher Dauer) im Allgemeinen **nicht berechnet** sondern **nur geschätzt** werden.
- Ein Schätzverfahren wird beurteilt nach dem Mittelwert und der Varianz seiner Schätzergebnisse.
- Ein Schätzer, dessen Mittelwert mit dem wahren Wert des Parametervektors übereinstimmt, heißt **erwartungstreu** (kein systematischer Fehler, engl.: *unbiased*).
- Ein Schätzer, der für zunehmende Fensterlänge (Messzeit, Probengröße) gegen den wahren Wert des Parametervektors konvergiert, heißt **konsistent**.
- Es gibt eine informationstheoretische untere Schranke für die Varianz einer Schätzung (zum Beispiel nach Cramér-Rao). Ein erwartungstreuer Schätzer, der diese Schranke erreicht, heißt **effizient**. Wenn er diese Schranke mit zunehmender Fensterlänge anstrebt, heißt er **asymptotisch effizient**.

## Übersicht Spektralschätzverfahren

Klasse	Modell	Verfahren
<b>Klassisch</b>	—	Korrelogramm
	—	Blackman-Tukey
	—	Periodogramm
	—	Bartlett-Periodogramm
	—	Welch-Periodogramm
	—	Maximum-Entropy-Methode
<b>Parametrisch</b>	AR	Kovarianzverfahren
		Mod. Kovarianzverfahren
		Burg-Algorithmus
		Yule-Walker
	MA	All-Zero-Prozess
	ARMA	Mod. Yule-Walker
	e-Funktionen	Prony
	sin-Funktionen + Rauschen	Pisarenko-Zerlegung
<b>Nicht-Parametrisch</b>	—	MUSIC-Eigenanalyse
	—	EV-Eigenanalyse

## 2 Klassische Spektralschätzung

### 2.1 Autokorrelationsfolge (AKF)

#### Exakte Darstellung der AKF

$$r_{xx}[k] = \mathcal{E} \{x[n+k]x^*[n]\}$$

#### Schätzung der AKF

$$\hat{r}_{xx}[k] = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x[n+k]x^*[n] & \text{für } 0 \leq k \leq N-1 \\ \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n+|k|]x^*[n] & \text{für } -(N-1) \leq k < 0 \end{cases}$$

## Autokorrelationsfolge (AKF)

### Eigenschaften der Schätzung

- erwartungstreue Schätzung  $\mathcal{E}\{\hat{r}_{xx}[k]\} = r_{xx}[k]$
- Varianz steigt mit zunehmendem Index  $k$ , weil die Länge der Mittelung abnimmt
- Varianz strebt mit zunehmender Datenlänge  $N$  gegen 0

Es handelt sich um eine konsistente Schätzung der AKF.

## 2.2 Korrelogramm

### Exakte Darstellung des Leistungsdichtespektrums (LDS)

$$P_{xx}(f) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T} \quad (\text{Wiener-Khintchine-Theorem})$$

### Korrelogramm

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{k=-L}^L \hat{r}_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T}$$

- $r_{xx}[k]$  ist konjugiert gerade  $\Rightarrow P_{xx}(f)$  ist rein reell
- $L \approx N/10$  ( $N$ : Länge der Datenfolge), wegen der sonst zunehmenden Varianz der AKF-Schätzung



## 2.3 Fensterung der AKF (Blackman-Tukey)

### Schätzung des LDS

$$\hat{P}_{\text{BT}}(f) = T \sum_{k=-L}^L w[k] \hat{r}_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T}$$

### Erwartungswert

$$\mathcal{E} \{ \hat{P}_{\text{BT}}(f) \} = T \sum_{k=-L}^L w[k] r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T} = P_{xx}(f) * W(f)$$

- Zeitfenster mit Bereichen  $W(f) < 0$  erzeugen negative Werte für  $P(f)$   $\Rightarrow$  **kein Rechteckfenster**
- $\hat{P}_{\text{BT}}(f)$  ist mit zunehmendem  $L$  asymptotisch erwartungstreu
- Standardabweichung kleiner als ein Drittel des Mittelwertes

## 2.4 Periodogramm (auch: direkte Methode)

### Exakte Darstellung des LDS

$$P_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{(2N+1)T} \left| T \sum_{k=-N}^N x[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2 \right\}$$

Weglassen von  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  und endlich lange Datenfolge führt auf die Schätzung

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{T}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2$$

Durch fehlende Erwartungswertbildung statistisch instabil. ☁



⇒ **Ensemble-Mittelwert**

## 2.5 Mittelung von Periodogrammen (Bartlett)

### Algorithmus

- Aufteilung der Datenfolge in nichtüberlappende Segmente
- Berechnung des Periodogramms  $\hat{P}_{xx}(f)$  für jedes Segment (zum Beispiel mit FFT)
- Mittelung der unmodifizierten Einzelperiodogramme an jedem Frequenzpunkt  $\Rightarrow$  Bartlett-Periodogramm

### Eigenschaften

- Gleiche Fenstereffekte, wie Einzelperiodogramme 
- $\text{var}\{\hat{P}_B(f)\} \approx \frac{P_{xx}^2(f)}{\text{Anzahl der Segmente}}$  
- Trade-off zwischen kleiner Varianz und hoher  $f$ -Auflösung

## 2.6 Mittelung von Periodogrammen mit Fensterung und Überlappung (Welch)

### Algorithmus

- Wie Bartlett, aber Fensterfunktion über jedes Segment (Welch: Hann-Fenster)
- Überlappung der Segmente zulässig

### Was ist dadurch gewonnen?

- Fensterung reduziert Nebenkeulen bei Spektren mit großer Dynamik, vermindert aber etwas das Auflösungsvermögen
- Durch Überlappung werden mehr Segmente gemittelt  $\Rightarrow$  kleinere Varianz
- Bei 50 %-iger Überlappung ist eine effiziente Implementierung mit Hilfe des FFT-Algorithmus möglich

## 2.7 Kombination Periodogramm-Korrelogramm

### Algorithmus

- Berechne Bartlett-Periodogramm (keine Überlappung, Rechteckfenster)
- Inverse FFT des Periodogramms (Schätzung der AKF)
- Fensterung der geschätzten AKF
- FFT ergibt Schätzung für die spektrale Leistungsdichte

### Was ist dadurch gewonnen?

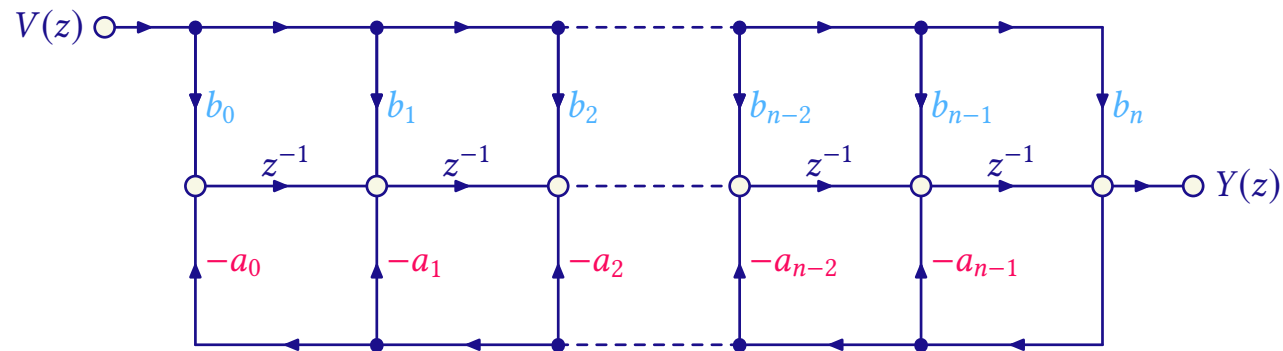
Gleiche statistische Eigenschaften wie Welch-Verfahren, aber halber Rechenaufwand (nur halb so viele Segmente müssen fouriertransformiert werden, keine Multiplikationen für eine Fensterung der Segmente)

## 2.8 Maximum-Entropy-Spektrum

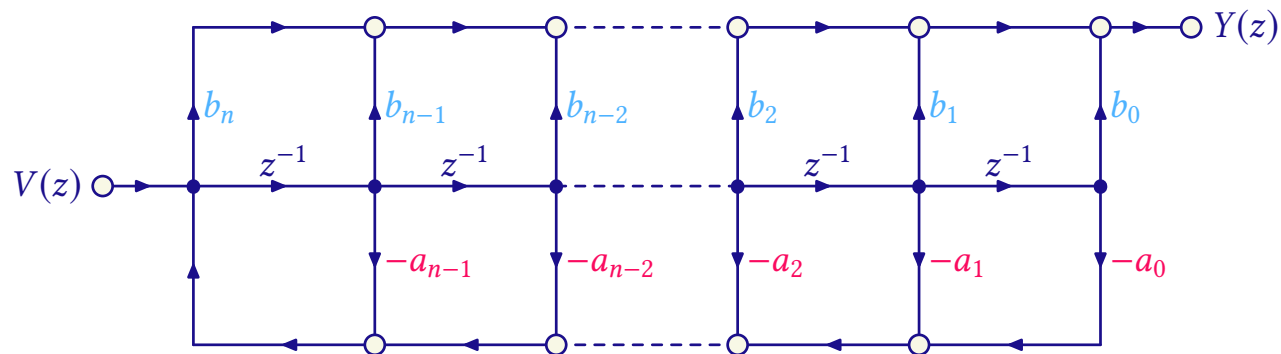
- Die Maximum-Entropy-Methode (MEM) vermeidet unrealistische Annahmen wie periodische Fortsetzung (diskrete Fourier-Transformation durch FFT) oder verschwindende Daten außerhalb des Beobachtungsfensters (Blackman-Tukey).
- Die MEM bestimmt das LDS des statistischen Prozesses mit der größten Informationsdichte, dessen AKF mit der gemessenen AKF im Beobachtungszeitraum übereinstimmt.
- Bei Modellierung eines stationären Prozesses sind das AR-Spektrum (Modellordnung  $M$ ) und das MEM-Spektrum (Prädiktorlänge  $M$ ) völlig äquivalent.

## 3 Hochauflösende Schätzverfahren (parametrisch)

### 3.1 Direkte Strukturen diskreter Filter



1. Struktur

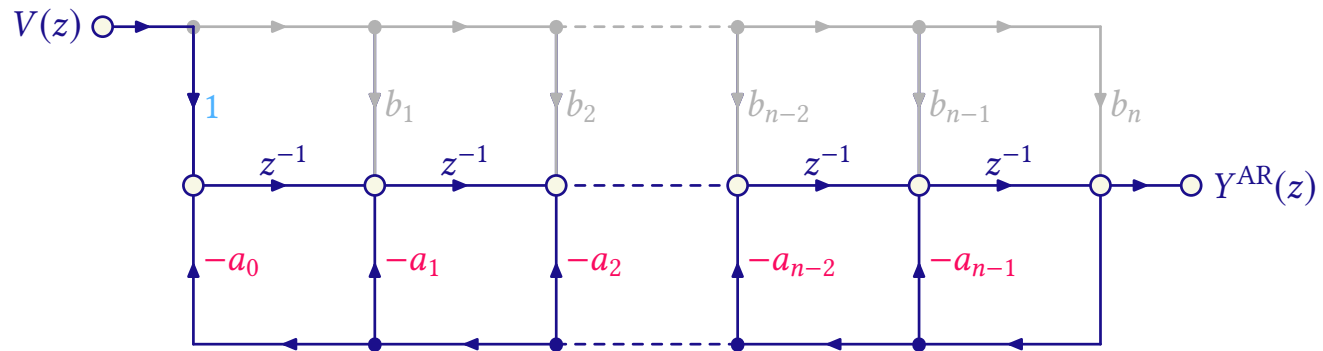


2. Struktur

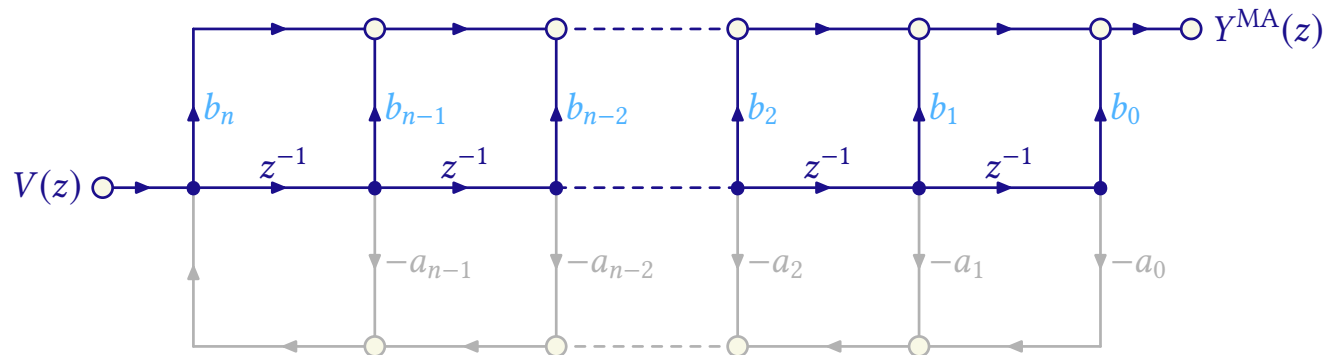
$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}} = b_m \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - z_{0\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (z - z_{\infty\nu})} \quad ; \quad a_n = 1$$



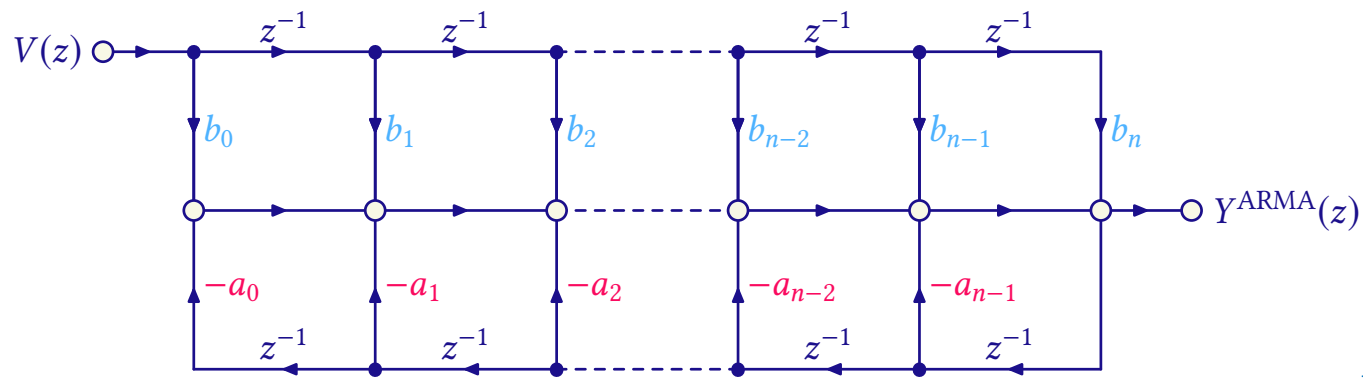
## 3.2 Strukturen von AR-, MA- und ARMA-Modellsystemen



**AR**  
all-pole  
IIR



**MA**  
all-zero  
FIR  
tapped-delay-line

**ARMA**

### 3.3 Übertragungsfunktionen und Differenzgleichungen von AR-, MA- und ARMA-Modellsystemen

$$H^{\text{AR}}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{v=1}^n a_v z^{-v}} \quad \bullet \circ \quad y[k] = - \sum_{v=1}^n a_v y[k-v] + v[k]$$

$$H^{\text{MA}}(z) = 1 + \sum_{\mu=1}^m b_{\mu} z^{-\mu} \quad \bullet \circ \quad y[k] = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} v[k-\mu]$$

$$H^{\text{ARMA}}(z) = \frac{1 + \sum_{\mu=1}^m b_{\mu} z^{-\mu}}{1 + \sum_{v=1}^n a_v z^{-v}} \quad \bullet \circ \quad y[k] = - \sum_{v=1}^n a_v y[k-v] + \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} v[k-\mu]$$

## 3.4 Bestimmung der AR-Parameter

### Yule-Walker-Gleichung

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[m-1] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[m-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m-1] & r_{xx}[m-2] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}[1] \\ r_{xx}[2] \\ \vdots \\ r_{xx}[m] \end{pmatrix}$$

$$\sigma_w^2 = r_{xx}[0] + \sum_{k=1}^m a_k r_{xx}^*[k]$$

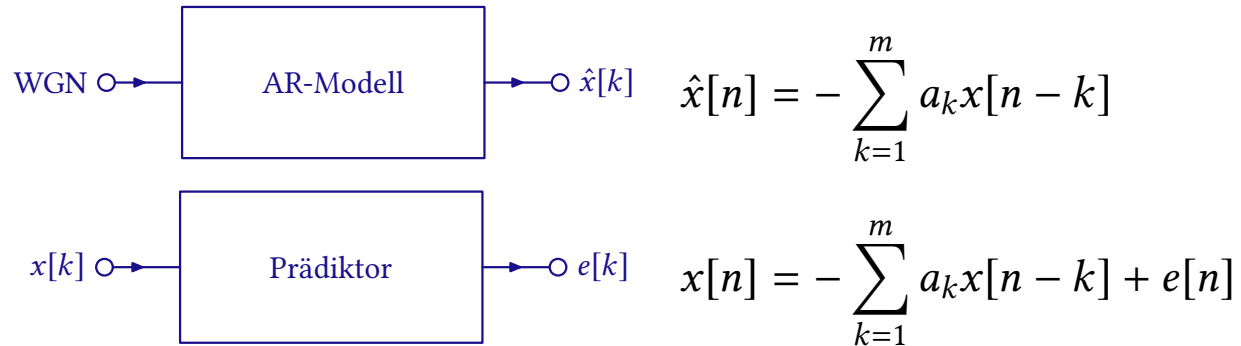
$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Levinson-Durbin-Rekursion

Algorithmus zur effizienten Lösung von Gleichungssystemen in Töplitz-Form

### 3.5 Kovarianzverfahren zur Vorwärtsprädiktion

Vorwärtsprädiktion (VP) und AR-Modell sind eng verwandt:



#### Unterschiede AR $\leftrightarrow$ VP

	AR-Filter	VP-Filter
Eingang	weißes Rauschen	$x[n]$
Ausgang	$\hat{x}[n]$	$e[n]$

## Kovarianzverfahren zur Vorwärtsprädiktion

- Das AR-Modell ist ein rekursives Filter mit den Koeffizienten  $a_k$ .
- Der Prädiktor ist ein MA-Filter mit den Koeffizienten  $-a_k$ .
- $\Rightarrow$  AR-Modell und Vorwärtsprädiktion sind zueinander komplementär.

Die Koeffizienten  $a_m$ , welche die Leistung des Prädiktionsfehlers minimieren, erhält man als Lösung von

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \cdots & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 3.6 Das Prony-Verfahren

### Zur Person Baron de Pronys

Gaspard de Prony (\* 22. Juli 1755, † 29. Juli 1839), Familienname Riche, 1780 Ingenieur und 1790 Chefsingenieur an der Ecole des Ponts et Chaussées, Zusammenarbeit unter Anderem mit Legendre und Carnot

### Ursprung des Verfahrens

Gesetze zur Ausdehnung von Gasen können durch Linearkombinationen von (reellen abklingenden) e-Funktionen modelliert werden.

Prony entwickelte ein Verfahren um  $N$  Messpunkte durch e-Funktionen exakt zu beschreiben. Dabei waren soviele e-Terme zugelassen, wie für die exakte Lösung nötig waren.

## Das Prony-Verfahren

### Moderne Varianten

- Verwendung von e-Funktionen mit komplexen Exponenten (harmonische Funktionen mit und ohne Dämpfung)
- In der Regel deutlich mehr Abtastwerte als Exponentialterme
- spektrale Interpretation

### Unterschiede zu anderen Verfahren

- Periodogramm und DFT verwenden **vorgegebene Frequenzen**
- AR, MA und ARMA verwenden **statistische Modelle**
- Das Prony-Verfahren **schätzt die Frequenzen**



## Das Prony-Verfahren

Die Datenfolge  $x[n]$  soll durch

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}$$

modelliert werden, wobei mit  $\Omega_k = \omega_k T$

$$\begin{aligned} z_k &= e^{(\alpha_k T + j\Omega_k)} && \text{die komplexen Schwingungen und} \\ h_k &= A_k e^{j\varphi_k} && \text{deren komplexe Amplituden} \end{aligned}$$

darstellen. Kriterium für die Güte der Modellierung ist die gesamte quadratische Abweichung

$$\varrho = \sum_{n=1}^N |x[n] - \hat{x}[n]|^2,$$

die zu minimieren ist.

## Das Prony-Verfahren

### Schwierigkeiten

- hoch nichtlineares Problem
- keine analytische Lösung möglich
- Iterationsverfahren (Gradientenverfahren, Newtoniteration) sind sehr rechenaufwendig und/oder finden nicht das globale Fehlerminimum.

Das Prony-Verfahren verwendet lineare Gleichungssysteme. Die Minimierung der quadratischen Abweichung  $\varrho$  ist dafür nicht ganz optimal.

## Das Prony-Verfahren

### Varianten

#### Prony-Verfahren

Es werden  $2p$  komplexe Parameter ( $h_1, \dots, h_p$  und  $z_1, \dots, z_p$ ) verwendet, um  $2p$  komplexe Abtastwerte ( $x[1], \dots, x[2p]$ ) **exakt** zu modellieren.

#### Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Wenn die Anzahl  $N$  der Abtastwerte größer ist, als die Anzahl  $2p$  der Parameter, dann können die Abtastwerte durch die Exponentialfolge nur **approximiert** werden.

#### Erweitertes Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Verwendet ungedämpfte Einzelschwingungen ( $\alpha_k = 0 \forall k$ ).

#### Prony-Spektrum

Das Prony-Verfahren ist eigentlich kein Spektralschätzverfahren. Die Schätzwerte  $\Omega_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $A_k$  und  $\alpha_k$  können aber spektral interpretiert werden. Verschiedene Annahmen über das Signal außerhalb des Beobachtungsbereichs führen auf verschiedene Spektren.

## Das Prony-Verfahren

### Einzelsschritte (bei allen Varianten)

1. Bestimmen der Prädiktionsparameter  $a_0, \dots, a_p$
2. Berechnen der  $\alpha_k$  und der  $\Omega_k$  aus den Nullstellen  $z_1, \dots, z_p$  eines Polynoms aus den Prädiktionsparametern
3. Die Lösung eines weiteren linearen Gleichungssystems liefert die Schätzwerte für  $A_k$  und  $\varphi_k$

## 3.7 Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Exakte Darstellung der Datenfolge durch

$$x[n] = \sum_{k=1}^p A_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{(\alpha_k T + j\Omega_k)(n-1)} = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}. \quad (1)$$

Umschreiben in

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[p] \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Prony entdeckte ein Verfahren, um die Bestimmung der zeitabhängigen Parameter  $z_k$  und der zeitunabhängigen Parameter  $h_k$  zu separieren.

## Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Definiere ein Polynom, dessen Nullstellen die  $z_k$  sind:

$$P(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k) = \sum_{m=0}^p a_m z^{p-m}, \quad a_0 = 1. \quad (3)$$

Durch **Verschieben des Index** in (1) nach  $n - m$ , **Multiplikation mit  $a_m$**  und **Summation** ergibt sich

$$\sum_{m=0}^p a_m x[n-m] = \sum_{k=1}^p h_k \sum_{m=0}^p a_m z_i^{n-m-1}, \quad (4)$$

für  $p + 1 \leq n \leq 2p$ .

## Das ursprüngliche Prony-Verfahren

Die Substitution  $z_k^{n-m-1} = z_k^{n-p-1} z_k^{p-m}$  ergibt

$$\sum_{m=0}^p a_m x[n-m] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-p-1} \sum_{m=0}^p a_m z_k^{p-m} = 0.$$

Die rechte Seite entspricht dem Polynom (3), ausgewertet an allen seinen Nullstellen.

Aus den Werten  $a_m$ , die diese Gleichung erfüllen, ergeben sich  $p$  Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \cdots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \cdots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[2p-1] & x[2p-2] & \cdots & x[p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \vdots \\ x[2p] \end{pmatrix}. \quad (5)$$

## Das ursprüngliche Prony-Verfahren

### Einzelschritte

1. Löse (5) → Koeffizienten  $a_m$  des charakteristischen Polynoms (3)
2. Bestimme die Nullstellen  $z_k$  des charakteristischen Polynoms (3)

$$\alpha_k = \frac{\ln|z_k|}{T} \text{ 1/s}$$

$$f_k = \frac{\arg\{z_k\}}{2\pi T} \text{ Hz}$$

3. Löse (2)

$$A_k = |h_k|$$

$$\varphi_k = \arg\{h_k\}$$



## 3.8 Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

### Problem

- Wenn mehr Abtastwerte als Parameter vorliegen, kann die Modellierung nur approximativ sein.
- Das vollständige Kleinste-Quadrate-Problem ist extrem nichtlinear und nicht analytisch lösbar.

### Lösung

Minimiere zunächst nicht  $\varrho = \sum_{n=1}^N |x[n] - \hat{x}[n]|^2$ , sondern den Fehler

$$e[n] = \sum_{m=1}^p a_m x[n - m]$$

der Vorwärtsprädiktion.

Das Auffinden der entsprechenden Prädiktionsparameter  $a_m$  entspricht exakt der Vorwärtsprädiktion nach dem Kovarianzverfahren.

## Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Entscheidung: Wieviele e-Terme sollen verwendet werden?

- Eigenwertanalyse
- FPE *final prediction error*
- AIC *Akaike information criterion*
- MDL *minimum description length*
- CAT *criterion autoregressive transfer*
- GMV *gesunder Menschenverstand* (oftmals beste Lösung)

## Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Koeffizienten  $a_m$ ) ergeben die  $z_1, \dots, z_p$ .

Das Restproblem „Minimiere  $\varrho$ “ ist linear in den verbleibenden Parametern  $h_1, \dots, h_p$ .

Es wird gelöst durch

$$\left( Z^H Z \right) \mathbf{h} = Z^H \mathbf{x}$$

wobei

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{pmatrix}.$$

## Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Modifikation: keine Dämpfung ( $\alpha_k = 0 \rightarrow |z_k| = 1$ )

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^p (h_k z_k^{n-1} + h_k^* (z_k^*)^{n-1}).$$

### Charakteristisches Polynom

$$P(z) = \prod_{k=1}^{2p} (z - z_k) = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^{2p-k}$$

mit  $a_0 = 1$ ,  $a_{2p} = \prod z_k$  und  $|a_{2p}| = 1$ .

Wegen  $1/z_k = z_k^*$  hat  $a_{2p} z^{2p} P^*(z)$  die gleichen Nullstellen wie  $P(z)$ , daher ist  $a_k = a_{2p} a_{2p-k}^*$ .

### Differenzgleichung

$$x[n-p] + \sum_{k=1}^p (g_p[k] x[n-p+k] + g_p^*[k] x[n-p-k]) = 0$$

## Das Kleinste-Quadrate-Prony-Verfahren

Minimiere nicht den Prädiktionsfehler, sondern

$$Q_p = \sum_{n=p+1}^{N-p} \left| x[n] + \sum_{k=1}^p (g_p[k]x[n+k] + g_p^*[k]x[n-k]) \right|^2.$$

### Zugehörige Normalgleichung

$$\begin{pmatrix} r_{2p}[0,0] & \dots & r_{2p}[0,2p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{2p}[2p,0] & \dots & r_{2p}[2p,2p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_p[0] \\ \vdots \\ g_p[1] \\ 1 \\ g_p^*[1] \\ \vdots \\ g_p^*[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ 2Q_p \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } r_{2p}[j,k] = \sum_{n=2p+1}^N (x^*[n-j]x[n-k] + x[n-p+j]x^*[n-p+k]).$$

### 3.9 Spektrale Interpretation

Voraussetzung: Annahme über den weiteren Verlauf von  $\hat{x}[n]$ , zum Beispiel

- einseitig unendlich ( $\hat{x}[n] = 0 \forall n < 0$ ),
- zweiseitig symmetrisch.

Zugehörige  $\mathcal{Z}$ -Transformierte:

$$\hat{X}_1(z) = \sum_{k=1}^p \frac{h_k}{1 - z_k z^{-1}} \quad \text{einseitig,}$$

$$\hat{X}_2(z) = \sum_{k=1}^p h_k \left( \frac{1}{1 - z_k z^{-1}} - \frac{1}{1 - (z_k^* z)^{-1}} \right) \quad \text{zweiseitig.}$$

Diese konvergieren für  $|z| > |z_k|$ .

Sind ferner  $|z_k| < 1$  (keine anklingenden Terme), dann ergibt die Substitution  $z = e^{j\Omega}$  die DFT von  $\hat{x}$ .

## Spektrale Interpretation

### Prony-Spektrum

$$\hat{S}_\nu(f) = |T\hat{X}_\nu(e^{j\Omega})|^2, \quad \Omega = 2\pi fT$$

### Eigenschaften

- $\nu = 1$ : geeignet für transiente Signale
- $\nu = 2$ : deckt auch ungedämpfte Schwingungen ab
- Beide Spektren können schmalbandige oder breitbandige Anteile modellieren.
- Starkes Rauschen bedingt hohe Schätzfehler bei den  $\alpha_k$  (meist viel zu groß).

### 3.10 Vorgehen bei bekannten Frequenzen

Es seien  $q$  Frequenzen  $z_1, \dots, z_q$  bekannt, nicht aber deren Amplituden.

Das charakteristische Polynom kann zerlegt werden:

$$\sum_{m=0}^p a_m z^m = \left( \sum_{k=0}^q c_k z^k \right) \left( \sum_{i=0}^{p-q} \alpha_i z^i \right).$$

Koeffizientenvergleich und Einsetzen der  $a_m$  in (4):

$$\sum_{m=1}^p a_m x[n-m] = \sum_{m=1}^p \left( \sum_{k=0}^q c_k \alpha_{m-k} \right) x[n-m] = 0$$

für  $p+1 \leq n \leq 2p$ .



## Vorgehen bei bekannten Frequenzen

Umstellen ergibt eine Faltung (entspricht Filterung):

$$\sum_{m=0}^{p-q} \alpha_m y[n-m] = 0 \quad \text{mit} \quad y[n] = \sum_{k=0}^q c_k x[n-k].$$

### Einzel Schritte

1. Originaldaten filtern, Koeffizienten  $c_k$  aus den bekannten Polen
2. Kovarianzverfahren zur Schätzung der  $\alpha_m$ . Die Nullstellen des verkürzten Polynoms  $\sum \alpha_i z^i$  sind Schätzwerte für die unbekanntenen Pole.
3. Bestimmen der Schätzwerte für die komplexen Amplituden  $h_k$  nach der Kleinste-Quadrate-Methode

## 4 Hochauflösende Schätzverfahren (nichtparametrisch)

### 4.1 Der MUSIC-Algorithmus

AKF des Modellsignals ( $M$  komplexe Schwingungen in weißem Rauschen mit Varianz  $\sigma^2$ ):

$$r_{xx}[k] = \sum_{i=1}^M P_i e^{jk\Omega_i} + \sigma^2 \delta_0[k] \quad ; \quad \Omega_i = \omega_i T \quad (6)$$

**Autokorrelationsmatrix** ( $p + 1$  Abtastwerte):

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^M P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H + \sigma \mathbf{E} = \mathbf{S}_p + \mathbf{N}_p \quad (7)$$

mit

$$\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} 1 & e^{j\Omega_i} & \dots & e^{jp\Omega_i} \end{pmatrix}^T$$

Jedes Vektorprodukt  $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H$  ist eine Matrix mit Rang 1.

$$\text{Rang}\{\mathbf{S}_p\} = M < p + 1$$

$$\text{Rang}\{\mathbf{N}_p\} = p + 1$$

## Der MUSIC-Algorithmus

Die Signalmatrix hat folglich nur  $M$  von Null verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ .

**Signalraum** Die zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M$  spannen den gleichen Raum auf, wie die Signalvektoren  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M$ .

**Rauschraum**  $\mathbf{v}_{M+1}, \dots, \mathbf{v}_{p+1}$  spannen den Rauschraum auf.

**Unitarität der Eigenvektoren** Die Eigenvektoren der hermiteschen Matrix  $\mathbf{R}_p$  sind paarweise unitär (konjugiert orthogonal).

Die Einheitsmatrix ergibt sich also auch durch

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

und damit die Eigenwertzerlegung von  $\mathbf{R}_p$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{S}_p + \mathbf{N}_p = \sum_{i=1}^M (\lambda_i + \sigma) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=M+1}^{p+1} \sigma \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H. \quad (8)$$

## Der MUSIC-Algorithmus

### Rausraum-Frequenzschätzung

Die Signalvektoren  $\mathbf{s}_i$  sind orthogonal zu jeder Linearkombination aus Basisvektoren des Rausraumes:

$$\mathbf{s}_i^H \left( \sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0. \quad (9)$$

Skalarprodukte mit gewichteten Linearkombinationen

$$\sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k |\mathbf{e}^H(\Omega) \mathbf{v}_k|^2 = \mathbf{e}^H(\Omega) \left( \sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \mathbf{e}(\Omega)$$

wobei

$$\mathbf{e}(\Omega) = \left( 1 \quad e^{j\Omega} \quad \dots \quad e^{jp\Omega} \right)^T$$

sind immer dann 0, wenn  $\mathbf{e}(\Omega) = \mathbf{s}_i$ .

## Der MUSIC-Algorithmus

### Die Frequenzschätzfunktion

$$\frac{1}{\sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k |\mathbf{e}^H(\Omega) \mathbf{v}_k|^2} \quad (10)$$

hat Pole an den Stellen  $\Omega = \Omega_i$ .

MUSIC-Verfahren:  $\alpha_k = 1 \quad \forall k$  :

$$P_{\text{MUSIC}}(\Omega) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\Omega) \left( \sum_{k=M+1}^{p+1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \mathbf{e}(\Omega)}$$

- In der Praxis keine Pole wegen Schätzfehler, aber sehr scharfe Peaks
- $P_{\text{MUSIC}}(\Omega)$  ist keine Schätzung der spektralen Leistungsdichte sondern ein Frequenzschätzer für schmalbandige Komponenten
- Die Trennung von Signalraum und Rausraum geschieht anhand der relativen Größen der Eigenwerte  $\lambda_i$  („Threshold“)

## 4.2 Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

Folge der Länge  $N$  mit  $M$  unbekanntem (fehlenden) Gliedern:

$$\mathbf{x} = \{x[0], x[1], \dots, x[k-1], \underbrace{\tilde{x}[k], \tilde{x}[k+1], \dots, \tilde{x}[k+M-1]}_{M \text{ unbekannte Samples}}, x[k+M], \dots, x[N-1]\}$$

Die Folge sei beschrieben durch  $P$  Autoregressionskoeffizienten  $a_1, \dots, a_P$ :

$$x[m] = \sum_{k=1}^P a_k x[m-k] + e[m]$$

## Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

$$\begin{pmatrix} e[P] \\ e[P+1] \\ \vdots \\ e[k-1] \\ e[k] \\ e[k+1] \\ e[k+2] \\ \vdots \\ e[k+M+P-2] \\ e[k+M+P-1] \\ e[k+M+P] \\ e[k+M+P+1] \\ \vdots \\ e[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[P] \\ x[P+1] \\ \vdots \\ x[k-1] \\ \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{x}[k+2] \\ \vdots \\ x[k+M+P-2] \\ x[k+M+P-1] \\ x[k+M+P] \\ x[k+M+P+1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x[P-1] & x[P-2] & \cdots & x[0] \\ x[P] & x[P-1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-2] & x[k-3] & \cdots & x[k-P-1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-P] \\ \tilde{x}[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-P+1] \\ \tilde{x}[k+1] & \tilde{x}[k] & \cdots & x[k-P+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k+M+P-3] & x[k+M+P-4] & \cdots & \tilde{x}[k+M-2] \\ x[k+M+P-2] & x[k+M+P-3] & \cdots & \tilde{x}[k+M-1] \\ x[k+M+P-1] & x[k+M+P-2] & \cdots & x[k+M] \\ x[k+M+P] & x[k+M+P-1] & \cdots & x[k+M+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-P-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{P-1} \\ a_P \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x[P-1] & x[P-2] & \cdots & x[0] \\ x[P] & x[P-1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-2] & x[k-3] & \cdots & x[k-P-1] \\ x[k+M+P-1] & x[k+M+P-2] & \cdots & x[k+M] \\ x[k+M+P] & x[k+M+P-1] & \cdots & x[k+M+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-P-1] \end{pmatrix}$$

## Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

$$\mathbf{x}_1 = (x[P] \ x[P+1] \ \dots \ x[k-1] \ x[k+M+P] \ x[k+M+P+1] \ \dots \ x[N-1])^T$$

Schätzung der AR-Koeffizienten durch die Kleinste-Quadrate-Normalgleichung:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{x}_1$$

Gleichungen mit den unbekanntem Gliedern:

$$\begin{pmatrix} e[k] \\ e[k+1] \\ e[k+2] \\ \vdots \\ e[k+M+P-2] \\ e[k+M+P-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{x}[k+2] \\ \vdots \\ x[k+M+P-2] \\ x[k+M+P-1] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-P] \\ \tilde{x}[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-P+1] \\ \tilde{x}[k+1] & \tilde{x}[k] & \cdots & x[k-P+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k+M+P-3] & x[k+M+P-4] & \cdots & \tilde{x}[k+M-2] \\ x[k+M+P-2] & x[k+M+P-3] & \cdots & \tilde{x}[k+M-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{P-1} \\ a_P \end{pmatrix}$$



## Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

Umschreiben in

$$\begin{pmatrix} e[k] \\ e[k+1] \\ e[k+2] \\ e[k+3] \\ e[k+4] \\ \vdots \\ e[k+P-1] \\ e[k+P] \\ e[k+P+1] \\ \vdots \\ e[k+M+P-2] \\ e[k+M+P-1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_P & -a_{P-1} & -a_{P-2} & -a_{P-3} & \cdots & 0 \\ 0 & -a_P & -a_{P-1} & -a_{P-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_P & -a_{P-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{P-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_P \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{x}[k+2] \\ \tilde{x}[k+3] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k+M-1] \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -a_P & -a_{P-1} & -a_{P-2} & \cdots & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_P & -a_{P-1} & \cdots & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_P & \cdots & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_P & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -a_{P-1} & -a_{P-2} & -a_{P-3} & \cdots & -a_1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2} \begin{pmatrix} x[k-P] \\ x[k-P+1] \\ x[k-P+2] \\ \vdots \\ x[k-1] \\ 0 \\ \vdots \\ x[k+M] \\ x[k+M+1] \\ x[k+M+2] \\ \vdots \\ x[k+M+P-1] \end{pmatrix}$$

## Interpolation fehlender Folgenglieder (LSAR)

Der gesamte quadratische Fehler ist

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2)$$

und dieser wird minimiert durch

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{LSAR}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k+1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k+M-1] \end{pmatrix}_{\text{LSAR}} = - \left( \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \left( \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{x}_2$$

## Quellen und weiterführende Literatur

- [1] P. M. T. Broersen: “Autoregressive Model Orders for Durbin’s MA and ARMA Estimators”. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* SP-48.8 (August 2000), pp. 2454–2457.
- [2] J. Capon: “High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis”. In: *Proceedings of the IEEE* 57.8 (August 1969), pp. 1408–1418.
- [3] Y. T. Chan, J. M. M. Lavoie, and J. B. Plant: “A Parameter Estimation Approach to Estimation of Frequencies of Sinusoids”. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* ASSP-29 (April 1981), pp. 214–219.
- [4] C. E. Davila: “A Subspace Approach to Estimation of Autoregressive Parameters from Noisy Measurements”. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* SP-46.2 (February 1998), pp. 531–534.
- [5] P. M. Djurić and S. M. Kay: “Spectrum Estimation and Modelling”. In: *The Digital Signal Processing Handbook*. Ed. by V. K. Madisetti and D. B. Williams. Boca Raton: CRC Press, 1998. Chap. 14.
- [6] P. M. Djurić and H.-T. Li: “Bayesian Spectrum Estimation of Harmonic Signals”. In: *Signal Proc. Letters* 2 (1995), pp. 213–215.

- [7] B. Friedlander: “Efficient algorithm for ARMA spectral estimation”. In: *IEE-Proceedings-F-(Communications,-Radar-and-Signal-Processing)* 130.3 (April 1983), pp. 195–201.
- [8] S. Haykin: *Adaptive Filter Theory*. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [9] K. D. Kammeyer: *Nachrichtenübertragung*. 3. Aufl. Stuttgart: Teubner, 2004.
- [10] K. D. Kammeyer und K. Kroschel: *Digitale Signalverarbeitung. Filterung und Spektralanalyse mit Matlab®-Übungen*. 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [11] S. M. Kay: *Estimation Theory*. Vol. 1. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993.
- [12] S. M. Kay and S. L. Marple: “Spectrum Analysis. A Modern Perspective”. In: *Proceedings of the IEEE* 69.11 (November 1981), pp. 1380–1419.
- [13] J. Makhoul: “Linear Prediction: A Tutorial Review”. In: *Proceedings of the IEEE* 63.4 (1975). Corr. in Proc. IEEE Vol. 64 (1976), No. 2, 285, pp. 561–580.
- [14] S. L. Marple: *Digital Spectral Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1987.
- [15] S. L. Marple: “Frequency resolution of Fourier and maximum entropy spectral estimates”. In: *Geophysics* 47.9 (September 1982), pp. 1303–1307.
- [16] S. J. Orfanidis: *Optimum Signal Processing*. 2nd ed. Rutgers University, 2007. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/osp2e/> (visited on 01/27/2013).

- [17] J. G. Proakis and D. G. Manolakis: *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
- [18] R. O. Schmidt: “Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation”. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-34.3 (1986), pp. 276–280.
- [19] H. W. Schüßler: *Analyse diskreter Signale und Systeme*. 5. Aufl. Bd. 1. Digitale Signalverarbeitung. Berlin: Springer, 2008.
- [20] H. W. Schüßler: *Entwurf und Realisierung von digitalen Systemen*. Bd. 2. Digitale Signalverarbeitung. Berlin: Springer, 2009.
- [21] P. Stoica, B. Friedlander, and T. Söderström: “High-order Yule-Walker estimation of the parameters of autoregressions from noisy measurements”. In: *Identification and System Parameter Estimation 1988. Selected Papers from the Eighth IFAC/IFORS Symposium*. Vol. 2. Oxford: Pergamon, 1989, pp. 1001–1006.
- [22] S. V. Vaseghi: *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*. 1st ed. Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.